# مقدمة

# في

# علم التحليل المركب

# Introduction to Complex Variables

**أ.د. مجدى الطويل**

**أستاذ الرياضيات بقسم الرياضيات الهندسية**

**كلية الهندسة – جامعة القاهرة**

الكتـــــاب : مقدمة في علم التحليل المركب

Introduction to Complex Variables

المؤلـــــف : أ.د. مجدي الطويل

رقـــم الطبعـــة : الأولى

تـاريخ الإصـدار: ١٤٢٦هـ-٢٠٠٥م



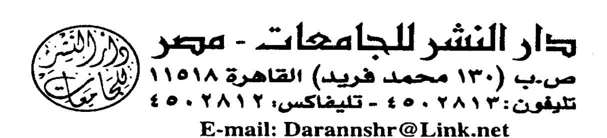
الناشـــــــــر: دار النشر للجامعات

رقـــم الإيـــداع: ٢٠٠٥/١٣٤٢١

الترقـيم الـدولي: ISBN: 977 - 316 - 160 – 9

الكـــــــود: ٢/١٧٩





E-mail: Darannshr@Link.net

# مقدمة

# في

# علم التحليل المركب

**Introduction to Complex Variables**

# إهداء

إلى المدينة المنورة

بحرمها النبوي وروضته

الشريفة وبركة الوقت وهذا

النور الذي ملأ حياتي وفجر

بداخلي ينابيع الخير.

# المحتويات

## الباب الثاني

## الاشتقاق

## الباب الثالث

## تكامل الدوال المركبة



## الباب الرابع

## نظرية الباقي

## الباب الخامس

## تطبيقات في التكامل المحدود



## ملحق أ

## الأعداد المركبة

# مقدمة المؤلف

مما لا شك فيه أن نظرية المتغير المركب من أدهـــش وأمتـــع النظريـــات لدارســـي الرياضيات حيث الخيال والواقع معاً في نسيج مدهش .. إلى عشاق هذا الفن أقدم هذا الكتاب باللغة العربية الحبيبة الممتعة .. فأضيف إليه متعة فوق متعته.

إن جمال التحدث والكتابة باللغة العربية يضفيان شياكة ورشاقة ودقة ويؤكد فهـــم القارئ للموضوع بلغته فلا غموض ولا التباس. وأعجب للذين يتناسون أو لا يرون هذا العمق ويصرون على التحدث بلغة غير لغتهم ويدرسون للطلاب بلهجة ليست بالعربيـــة وليـــست بالأجنبية فهي عوان بين ذلك .. بل أؤكد وأقول أن اللغة العربية تضفي دقة على الكتابـــة .. لأن المؤلف يعبر بها تعبيراً دقيقاً عما يقصده ويفهمه القارئ العربي فهماً دقيقاً لا مجال للغموض فيه على الإطلاق.

في هذا الكتاب، وهو الخامس باللغة العربية، أقدم نظرية المتغير المركب للقارئ العربي ذو المستوى الجامعي.. ولذلك فقد وضعت ملخصاً للأعداد المركبة في الملحق ويمكن للمبتدئ أن يبتدئ به ليفهم أولاً حقائق الأعداد المركبة وخواصها .. وكان يعنيني في الباب الأول أن يفهم القارئ ماهية هذا العالم الجديد الذي ســـيقدم عليه .. وما هو هذا الخيـــال المـــسمى بالمستوى المركب وكيف نصف عليه أشكالاً خيالية مثله .. ولكننا استغرقنا في الخيال لننشئ واقعاً مدهشاً وممتعاً فإذا بنا نتقدم من تعريف الدوال وتحويلاتها من مستوى مركب إلى مستوى مركب آخر (أي من خيال إلى خيال) .. وكيف بنا ننطلق من هذا الخيال إلى واقع تعريـــف النهايات والاتصال والاشتقاق في الباب الثاني .. وركزت تركيزاً عالياً على الجديد في هـــذا الباب .. وهو نظرية كوشي — ريمان.. وشرطاه المبتكران. إلا إن السحر الكبير يقع في نظرية التكامل في الباب الثالث والرابع ليكون موضوع فك الدوال ما هو إلا سبباً لتقـــديم نظريـــة لورنت لاستعمالها في اثبات نظرية الباقي وهي النظرية العمدة في التكامل ولـــذلك جعلـــت لتطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية باباً خاصاً وهو الباب الخامس عارضـــاً فيـــه عـــدة مسارات مغلقة مشهورة وتكاملات هامة أرجو أن أكون قد وفقت في تجميعها.

وفي النهاية فإن هذا الكتاب مقدمة لمن يريد أن يستزيد من سحر هــذه النظريــة وتطبيقاتها في العلوم وأرجو الله أن يمكننا يوماً ما من إكمال هذا الكتاب ليصبح عنوانه مثــل كتاب المصفوفات والاحتمالات .. "التحليل المركب .. النظرية والتطبيق" .. أرجو أن تتقبلوا "المقدمة" مع أمل أن أجعلها مرجعاً عاماً في هذا العلم. فليزيدنا الله من فضله وليبارك لنــا فى الوقت .. فالوقت هو الحياة.

**مجدي الطويل**

**المدينة المنورة**

**٣ جمادى الأولى ١٤٢٥ هـ**

**٢٠٠٤/٦/٢٠**

# الباب الأول

## دوال المتغير المركب – النهايات – الاستمرار
## Functions of Complex variables, limits, continuity

### ١–١ مقدمة Introduction:

إن تعريف العدد التخيلي imaginary number $i$ والذي قيمته $\sqrt{-1}$ فتح المجال لتوسيع مجال الأعداد الحقيقية $\Re$ إلي الأعداد المركبة $Z$ (ملحق أ) حيث $\alpha,\beta\in\Re$ , $z=\alpha+i\beta$ وصنع هذا ما يسمى بالمتغير المركب.

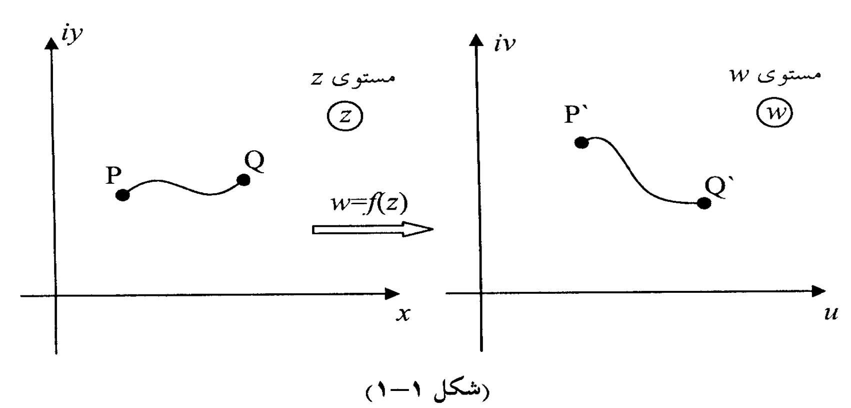
إذا كانت $(x, y)$ نقطة عامة في مستوى يسمى بمستوى المتغير المركب أو بالمستوى المركب وكان $z=x+iy$ وهو مستوى غير موجود لأن هياكل الإسناد فيه إحداهما حقيقي (وهو محور $x$) والآخر تخيلي (وهو $iy$) .. فهذا المستوى موجود في خيال الرياضيين فقط مثله مثل الفراغات التي أبعادها أكثر من ثلاثة حيث لا يمكن تمثيلها هندسياً بشكل يمكن تخيله .. ولكن بالاستغراق في هذا الخيال اكتشفنا عالماً جديداً .. كأنه الأحلام .. ومثل الأحلام فإن بعضها مثل الرؤى ينم عن حقائق فإن هذا المستوى الخيالي ينتج واقعاً رياضياً وتطبيقات لم يكن لها حل في المستوى الحقيقي فوجدنا لها حلاً بواسطة المستوى الخيالي أو المركب complex plane.

### ١–٢ دوال المتغير المركب Functions of Complex Variables

#### ١–٢–١ مقدمة

إذا كانت $z = x + iy$ فإن $w = f(z)$ تمثل علاقة بين $z$ و $w$ .. وتحت الشروط المعروفة للعلاقات لكي تكون دوال فإن الشروط نفسها تنتج لنا دوال المتغير المركب .. وتكون هذه الدوال وحيدة القيمة single valued إذا كانت كل قيمة لـ $z$ تنتج قيمة

وحيدة لـ $w$ .. ويمثل هذا نوع من التحويل بين مستويين خياليين .. كما بالشكل ١-١
حيث $z = x + iy$ و $w = u + iv$




**(شكل ١-١)**

وهذا التحويل ينتج أشياءً فريدة غير موجودة في واقع المستوى الحقيقي وتحويلاته ..
إذ لا يمكن رسم العلاقة بين $z$ وَ $w$ في مستوى خاص بهما لأن $z$ تقع في في مستوى وَ $w$ تقع في مستوى آخر ولا يمكن رسم العلاقة بين $z$ وَ $w$ مباشرةً .. فنحن ننقل النقطة من مستوى $z$ إلى مستوى $w$ وهكذا ينتقل الشكل في مستوى $z$ إلى شكل آخر في مستوى $w$
وبينما يمثل $w = f(x,y)$ علاقة سطح **surface** في نظام حقيقي ثلاثي الأبعاد فإن هذه العلاقة على صورة $w = f(z)$ لا تعطى هذا المعنى إطلاقاً .. وإن كان من الممكن إطلاق علاقات الحساب التفاضلي التكاملي لدوال ذات متغيرين على العلاقة في المستوى المركب ..
ولكن ليس كل العلاقات .. كما أن هناك حساباً جديداً ينشأ .. دعونا الآن نأصّل فكرة التحويل المركب **complex transformation** عن طريق الأمثلة الآتية:

**مثال ١-١:**

إذا كان $w = z + \alpha$

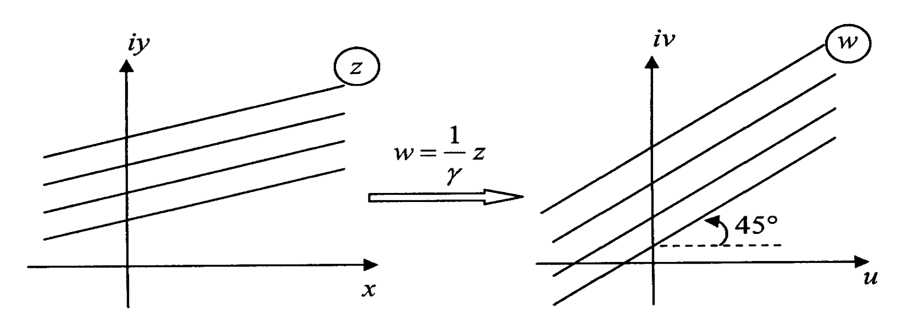
حيث $\alpha \in z$ فإنه بوضع $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$ فإن:

فإن العلاقة

$$w = \frac{1}{\gamma} z$$

تنتج شبكة من الخطوط ذات ميل ٤٥° كما هو مبين بالشكل ١ -٣




(شكل ١-٣)

ويمكن الحصول على شبكة من الخطوط الأفقية أو الرأسية .. وهكذا باستعمال هذا التحويـــل الخطي.

**مثال ١-٢:**

لنفس العلاقة الخطية

$$w = \alpha z + \beta \quad , \quad \alpha \in \Re$$

فإن الدوائر في مستوى $z$ تصبح دوائر أيضا في مستوى $w$

**الإثبات:** $z = x + iy$

حيث $x^2 + y^2 = a^2$ (دوائر مركزها نقطة الأصل)

وبالتالي فإن $u+iv = \alpha x+\beta_1+i(\alpha y+\beta_2)$ حيث $\beta=\beta_1+i\beta_2$

أي أن علاقات التحويل

$$u = \alpha x + \beta_1$$
$$v = \alpha y + \beta_2$$

وبالتالي فان علاقات التحويل

$$u + iv = (x+iy) + (\alpha_1 + i\alpha_2)$$

$$u = x + \alpha_1$$

$$v = y + \alpha_2$$

فإذا كان الشكل في مستوى (z) خطياً بحيث يكون

$$y = \gamma x + \Gamma \quad , \quad \gamma, \Gamma \in \Re$$

فإن:

$$u = x + \alpha_1$$

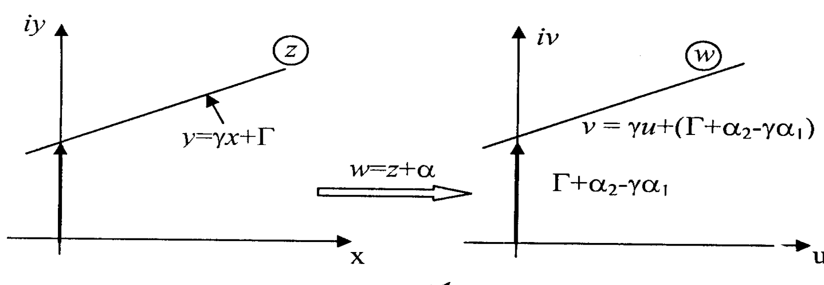
$$v = y + \alpha_2 = \gamma x + \Gamma + \alpha_2$$

وبحذف $x$ بين المعادلتين لـ $u, v$ فإن:

$$v = \gamma (u - \alpha_1) + \Gamma + \alpha_2$$

$$\boxed{v = \gamma u + (\Gamma + \alpha_2 - \gamma\alpha_1)}$$

أي أن الأشكال الخطية في مستوى (z) تنتقل إلى أشكال أيضا خطية في مستوى (w) كما يبين شكل ١-٢




**(شكل ١-٢)**

ونلاحظ أن الخطوط تنتقل بين المستويين بنفس الميل $\gamma$ ولكن هناك تغير في الجزء المقطوع من المحور الرأسي .. فإذا تغيرت العلاقة بين $z$ و $w$ بحيث يكون $w = \alpha z$ فإن تغيراً يطرأ على الميل بحيث يكون مضروباً في $\alpha$ في مستوى $\omega$ ويمكن استغلال هذا في تصنيع شبكة من الخطوط ذات ميل معين مرغوب فيه فمثلاً إذا كان $y = \gamma x + \Gamma$

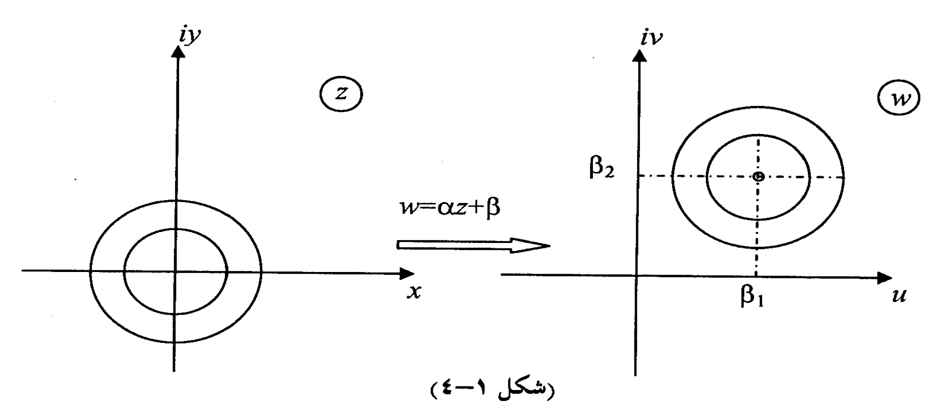
أي أن $x = \frac{u-\beta_1}{\alpha} \Rightarrow x^2 = \frac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2}$

كذلك $y = \frac{v-\beta_2}{\alpha} \Rightarrow y^2 = \frac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$

وبالتالي فإن: $a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a^2 = \frac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$

أي أن $(\alpha\, a)^2 = (u - \beta_1)^2 + (v - \beta_2)^2$

وهي دوائر نصف قطرها $\alpha\, a$ ومركزها $(\beta_1, \beta_2)$ كما يوضح الشكل ١-٤




(شكل ١-٤)

وتمثل $\beta$ نقطة إزاحة المركز بينما تمثل $\alpha$ معامل التكبير والتصغير للدوائر.

وربما يتضح فائدة أكبر لأمثال هذه التحويلات حين نجدها قادرة على تحويل شبكة غير خطية إلى شبكة خطية أفقية ورأسية كما بالمثال التالي:

**مثال ١-٣:**

إذا كان $w = z^2$

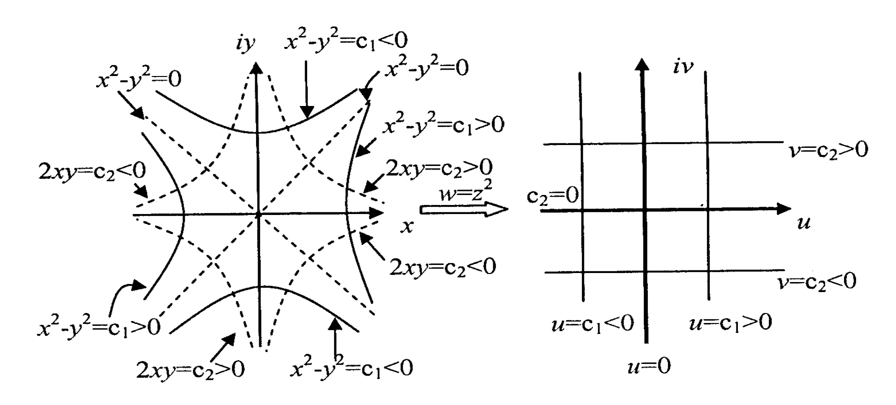
فإن علاقات التحويل $u = x^2 - y^2$

$v = 2\,xy$

فإذا أخذنا العلاقات التي فيها $u, v$ ثابتين فإن هذا معناه أن الأشكال غير الخطية

$$x^2 - y^2 = c_1$$
$$2xy = c_2$$

تنتج أشكال أفقية $v = c_2$ وأشكال رأسية $u = c_1$ مصاحبة لها كما بالشكل ١-٥




**(شكل ١-٥)**

ويتضح من الشكل أن الشبكة غير الخطية $x^2 - y^2 = c_1>0$ تتحول إلى خطوط رأسية متوازية وأن $x^2-y^2=c_1<0$ تتحول أيضاً إلى شبكة خطوط رأسية متوازية بينما تتحول $2xy = c_2$ إلى شبكة خطوط أفقية ويتحول الخطان $x^2-y^2=0$ إلى المحور التخيلي في مستوى $w$ بينما يتحول الخطان $x = 0$ وَ $y = 0$ إلى المحور الحقيقي في مستوى $w$ وهي تحويلات يمكن استغلالها في كثير من التطبيقات.

وأحياناً ينتج من هذه التحويلات دوال عديدة القيم وفيها يتم الحصول على أكثر من قيم لـ $w$ لقيمة وحيدة $z$ والدوال الناتجة من أمثال هذه العلاقات يمكن اعتبارها مجموعة من الدوال وحيدة القيمة a collection of single-valued functions ويطلق على كل عضو في المجموعة بالفرع branch.

**مثال ١-٤:**

الدالة $w = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+iy}$

في هذه الحالة $w = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)}, \ k = 0,1$

حيث $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وبالتالي فهناك قيمتان للدالة الأولى:

$$w_o = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (k=0)$$

وتسمى بالفرع الأساسي للدالة principal function

والأخرى:

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)} \qquad (k=1)$$

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\pi}$$

$$w_1 = -\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

ولذلك فإن $w = z^{\frac{1}{2}}$ دالة مزدوجة القيم Two-valued functions.

**ملاحظة:**

الدالة $w = z^{\frac{1}{n}}, \ n \in N^+$ هي دالة عديدة القيم بدرجة n n-valued function بحيث يكون

$$w_k = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}, \ k = 0,1,2..,n-1$$

ودائما عند $k=0$ فإننا نحصل على الدالة الأساسية.

ولاحظ أن العلاقة تعطي المعادلة $w^n = z$ وهي معادلة من درجة n ولذلك فلها n من الجذور جميعها تحقق المعادلة ونلاحظ أن

$$w_k^n = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i(\theta+2\pi k)} = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i\theta}.e^{i2\pi} = r\,e^{i\theta}$$
$$= z.$$

## ١-٢-٢ الدوال الحدودية Polynomial Functions

وفيها يكون:

$$w = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + .. + a_n z^n,\ a_n \in z$$

والعلاقة الخطية تحافظ على الأشكال كما برهنا سابقاً .. ولكن العلاقات غير الخطية تعطي تغييراً وحيداً في الأشكال وقد بيننا سابقاً في بعض الأمثلة هذه التغيرات.

**نظرية**

التحويلة الخطية $w=\alpha z+\beta$ حيث $\alpha \in \Re$

تحافظ على شكل العلاقات في مستوى $z$

**الإثبات:**

من المعلوم أنه إذا كان $c = f(x, y)$ تمثل شكلاً ما في مستوى $z$ فإن $c=f(\alpha x,\ \alpha y)$ تمثل نفس الشكل ولكن بمقياس scale مختلف فإن الدائرة $a^2=x^2+y^2$ تحافظ على شكلها كدائرة إذا كان $a^2=(\alpha x)^2+(\alpha y)^2$ ولكن بنصف قطر مختلف $(a/\alpha)$، كذلك فأن $f(x-\alpha, y-\beta)$ تمثل نفس الشكل أيضا بنقل المحاور إلى النقطة $(\alpha,\beta)$ كانتقال الدائرة من $a^2=x^2+y^2$ الى الدائرة $a^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ ، فإذا حدث التحويلان معاً فهو تغير في المقياس مصحوباً بانتقال المحاور ولكن الشكل يظل كما هو دون تغيير.

وفي حالتنا هذه فإن علاقات التحويل هي:

$$u = \alpha\, x + \beta_1 \quad , v = \alpha\, y + \beta_2$$

أي أن:

$$x = \frac{u-\beta_1}{\alpha} \quad , \quad y = \frac{v-\beta_2}{\alpha}$$

وبالتالي فإن العلاقة $f(x, y)= c$ تصبح $f\left(\frac{u-\beta_1}{\alpha}, \frac{v-\beta_2}{\alpha}\right) = c$

وهي تمثل نقلاً للمحاور الى النقطة $(\beta_1,\beta_2)$ وتغييراً في القياس بمقدار $\alpha$.

وهذا يثبت أن التحويلة الخطية تحافظ على الأشكال.

**ملاحظات:**

إذا كانت $\alpha \in z$ فإن معادلات التحويل تصبح:

$$u = \alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1$$
$$v = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$$

أي أن:

$$\alpha_1 x - \alpha_2 y = u - \beta_1$$
$$\alpha_2 x + \alpha_1 y = v - \beta_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-\beta_1 \\ v-\beta_2 \end{pmatrix}$$

وهي مازالت تمثل علاقات خطية بين المحاور القديمة $(x, y)$ والجديدة $(u, v)$

وبالتالي تعطي نفس فصيلة الأشكال بدوران ونقل المحاور.

**مثال ١-٥:**

إذا كانت $w=(1+i)z$ فإن:

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

أي أن:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ تصبح:

$$\frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2 = a^2$$

$$u^2 + 2uv + v^2 + v^2 - 2uv + u^2 = 4a^2$$

$$u^2 + v^2 = 2a^2$$

$$u^2 + v^2 = \left(\sqrt{2}\ \text{a}\right)^2$$

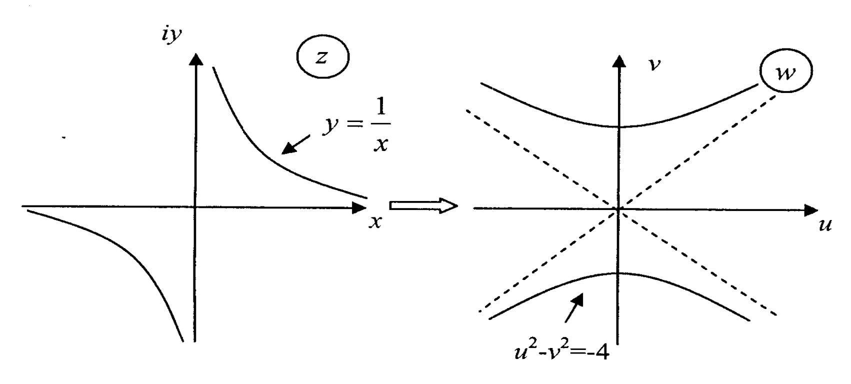
وبالتالي فإن الدوائر بنصف قطر a تتحول الي دوائر بنصف قطر $\left(\sqrt{2}\,\text{a}\right)$.

كذلك فإن القطع الزائد $xy = 1$ يتحول الي:

$$\frac{1}{4}(u+v)\ (v-u) = 1$$

$$u^2 - v^2 = -4$$

وهو قطع زائد كما هو مبين بالشكل ١-٦، وهو مجرد دوران للمحاور للشكل الأصلي.




(شكل ١-٦)

## ١-٢-٣ الدوال النسبية الجبرية Rational Algebraic Functions

وفيها يكون $w = \dfrac{f(z)}{Q(z)}$

حيث $f(z)$ و $Q(z)$ دوال حدودية وحيث $Q(z) \neq 0$.

ومن أشهر هذه الدوال ما يسمى بمزدوج الخطية bilinear

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ (\text{ad - bc} \neq 0)$$

**مثال ١-٦:**

أثبت أن التحويل المزدوج الخطية

$$w = \frac{z-1}{i(z+1)}$$

يحول المحور التخيلي إلى دائرة الوحدة unit circle

**الإثبات**

$$w = \frac{z-1}{i(z+1)} \Rightarrow |w| = \frac{|z-1|}{|i|\,|z+1|}$$

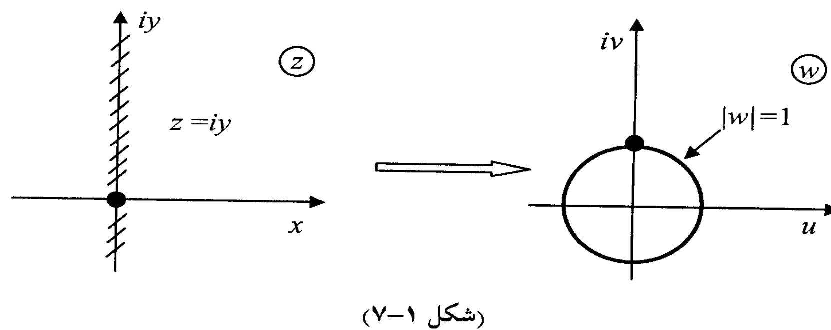
ولكن $|i| = 1$ ، كذلك بالنسبة للمحور التخيلي:

$$z-1 = iy-1 \Rightarrow |z-1| = \sqrt{1+y^2}$$

$$z+1 = iy+1 \Rightarrow |z+1| = \sqrt{1+y^2}$$

وبالتالي فإن: $|w| = 1$

وهى معادلة دائرة الوحدة. أي أن المحور التخيلي في مستوى $z$ يتحول إلى دائرة الوحدة في مستوى $w$ كما بالشكل١-٧




(شكل ١-٧)

**ملاحظة هامة:** علاقة الدائرة في مستوى $z$ كالآتي:

$$| z - z_o | = r$$

وهى دائرة مركزها عند $z_o$ ونصف قطرها r

أما العلاقة $| z - z_o | + | z - z_1 | = r$

فهي تعطي علاقة قطع ناقص حيث مجموع المسافتين بين أي نقطة $z$ والقطبين $z_o$ وَ $z_1$ هي r.

## ١-٢-٤ الدالة الأسـية Exponential Function

وتعرف كالآتي:

$$\begin{aligned} w &= e^z \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

باستخدام علاقة أويلر

أي أن علاقات التحويل هي:

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

ولهذه الدالة الخواص الآتية:

(أ) $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$

**الإثبات**

$$\begin{aligned} e^{z_1} . e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} . e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}\ e^{x_2}\ e^{iy_1}\ e^{iy_2} \\ &= e^{(x_1+x_2)}\ e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(ب) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

(ج) $| e^z | = e^x$

الإثبات:

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^{z}| = |e^{x}|\sqrt{\cos^{2} y + \sin^{2} y} = |e^{x}|$$

(د) $e^{z+2\pi ik} = e^{z} \quad , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

الإثبات:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi ik} &= e^{z}.e^{2\pi ik} \\ &= e^{z}.(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k) \\ &= e^{z}(1+i0) \\ &= e^{z} \end{aligned}$$

أي أن الدالة $w = e^{z}$ دالة دورية periodic بدورة قدرها $2\pi ik$.

(هـ) $\mathrm{Arg}\,(e^{z}) = y$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{x}(\cos y + i\sin y) \\ &= e^{x}.e^{iy} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $e^{z}$ كمتغير مركب له مقدار $e^{x}$ وسعة قدرها $y$.

(و) $e^{i(0)} = 1$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{i(0)} &= \cos 0 + i\sin 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

**مثال ١-٧:**

الدالة $w = e^{z}$ تحول الخطوط الرأسية إلى دوائر

**الإثبات:** بأخذ الخط الرأسي في مستوي $z$ كالآتي: $x = c$

فإن:

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^{c}(\cos y + i\sin y)$$

إذن علاقات التحويل:

$$u = e^{c} \cos y$$

$$v = e^{c} \sin y$$

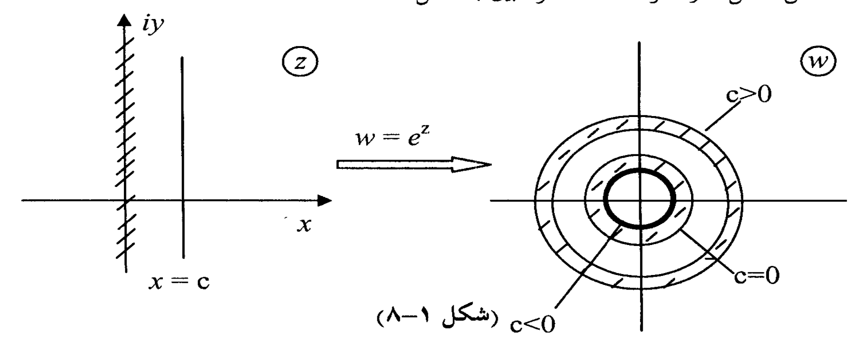
وبالتالي

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 = e^{-2c}(u^2+v^2)$$

أي أن:

$$u^2 + v^2 = e^{2c}$$

وهذه علاقة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $e^c$ ولذلك فإن المحور التخيلي يتحول الى دائرة الوحدة .. وفي حالة $c > 0$ فإن الدوائر تزداد اتساعاً وفي حالة $c < 0$ فإن الدوائر تتقلص داخل دائرة الوحدة كما هو مبين بالشكل ١–٨




(شكل ١–٨)

## ١–٢–٥ الدوال الهندسية Trigonometric Functions

وتتبع التعريفات الآتية كما هو متبع في الدوال الحقيقية:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

مع ملاحظة أن هذه الدوال لا تعبر عن نسب مثلثية كما أن $z$ ليست زاوية .. ولكنـــها الآن مجرد علاقات ذات شبه بالعلاقات القديمة في المستوى الحقيقي.

ولهذه الدوال الخواص الآتية:

(أ) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

**الإثبات:**

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= -\frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

(ب) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

**الإثبات:**

$$\begin{aligned}\sin(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2!}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right) \\ &= \frac{1}{2!}\left(e^{iz_1}.e^{iz_2} - e^{-iz_1}.e^{-iz_2}\right) \\ &= \frac{1}{2!}\big((\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) \\ &\quad - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)\big)\end{aligned}$$

(وذلك باستخدام أن $\sin(-z) = -\sin z$

$\cos(-z) = \cos z$

.. بغض النظر عن التسميات فردي وزوجي)

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2i}[\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ &\quad + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \\ &\quad - \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2\end{aligned}$$

$$+ i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\sin z_1 \cos z_2 + 2\cos z_1 \sin z_2)$$

$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

وبالمثل فكل العلاقات الشبيهة مازالت سارية مثل

- $\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$
- $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

وعلى القارئ محاولة إثبات هذه العلاقات كنوع من التمرين ..

وأكرر أن هذه العلاقات مجرد تشابه بين الدوال الحقيقية والدوال المركبة.

**مثال ١-٨:**

أثبت أن أصفار الدالة $w=\sin z$ والدالة $w=\cos z$ كلها حقيقية وأوجدها.

**الحل:**

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^{2\pi ik}$$

أذن $2iz = 2\pi ik$

أي أن: $z = \pi k\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

وكلها حقيقية.

كذلك:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$$

$$2z = (2k+1)\pi$$

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

وكلها حقيقية

وعلى ذلك يتضح أن الدوال الحقيقية sin x وَ cos x تتفق مع الدوال المركبة sin z وَ cos z في نفس الأصفار على الترتيب.

**مثال ١-٩:**

أثبت أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

**الإثبات:**

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-iz}\right)$$

$$|\cos z| = \frac{1}{2}\left|e^{iz} + e^{-iz}\right| \le \frac{1}{2}\left|e^{iz}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{-iz}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}.e^{ix}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}.e^{-ix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}\right|$$

حيث $\therefore \left|e^{i\theta}\right| = 1$

وبالتالي:

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \left(\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}\right)}} |\cos z| \le \infty$$

ووجود التساوي يعني أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

أي أن هذه الدالة لم تعد محدودة كما كانت في المستوي الحقيقي.

**مثال ١–١٠:**

الدالة $w = \sin z$ دالة دورية ودورها $2\pi$.

**الإثبات:**

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\, e^{i2\pi} - e^{-iz} e^{-iz\pi}\right)$$

ولكن $e^{\pm i2\pi}=1$ .. إذن

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin z$$

أي أن الدالة $\sin z$ دالة دورية ودورها قدره $2\pi$. وبالمثل الدالة $w = \cos z$.

(ج) $\cos(0) = 1 \quad , \quad \sin(0) = 0$

## ١–٢–٦ الدوال الزائدية Hyperbolic functions

وهي تتبع التعريفات الآتية:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

ولها الخواص الآتية:

(أ) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(ب) $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

(ج) $\coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$

(د) $\sinh(-z) = -\sinh z$

(هـ) $\cosh(-z) = \cosh(z)$

(و) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

(ز) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

(ح) $\tanh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 . \tanh z_2}$

وهناك علاقات أخري هامة كالآتي:

(أ) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(ب) $e^{z} = \cosh z + \sinh z$

(ج) $\sin iz = i \sinh z$ ,

$\sinh iz = i \sin z$

(د) $\cos iz = \cosh z$ ,

$\cosh iz = \cos z$

(هـ) $\tan iz = i \tanh z$

$\tan iz = i \tanh z$

**مثال ١-١١:**

أوجد $u, v$ للدالة $w = \sin z$

**الحل:**

$$w = \sin z = \sin(x + iy)$$
$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبالتالي فإن:

$$u = \sin x \cosh y$$
$$v = \cos x \sinh y$$

**مثال ١-١٢:**

أثبت أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

**الإثبات:**

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x+iy) \\
&= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \\
&= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cosh^2 y + \frac{1}{2}(1-\cos 2x).\sinh^2 y \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh^2 y + \sinh^2 y\right) + \frac{1}{2}\cos 2x\left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh 2y + \frac{1}{2}\cos 2x(1) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)
\end{aligned}$$

أي أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

**ملاحظة:** وعلى هذا يتضح أيضا أن الدالة cosz ليست محدودة بالنسبة لـ y لأن:

$$\lim_{y\to\infty} \cosh 2y \to \infty$$

**مثال ١-١٣:**

أوجد شكل التحويل $w = \sin z$ لخطوط أفقية في مستوى $z$

**الحـــل**

الخط الأفقي في مستوى $z$ .. $y = c$

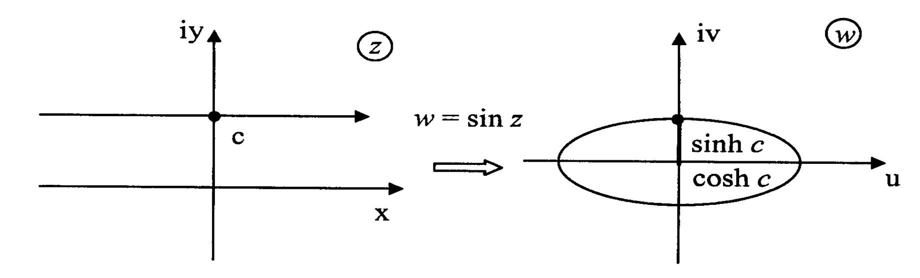
ومن علاقات التحويل السابق الحصول عليها في مثال ١-٩:

$$u = \sin x \cosh c$$
$$v = \cos x \sinh c$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

وهي علاقة قطع ناقص كما هو مبين بالشكل ١-٩




(شكل ١-٩)

## ١-٢-٧ الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

وتعرف كالآتي: $w = \ln z$

وهي معكوس الدالة $z = e^w$ .. على أن الدالة $w = \ln z$

هي دالة عديدة القيم وذلك لأن:

$$w = \ln z = \ln r\, e^{i\theta} = \ln r\, e^{i(\theta+2\pi k)}$$
$$= \ln r + i(\theta+2\pi k) \ , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

وعلاقات التحويل هي:

$$u = \ln r$$
$$v = \theta+2\pi k$$

ونحصل على القيمة الأساسية للدالة عندما يكون $k = 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$

**ملاحظات:**

(i) بشكل عام فإن $z = a^w$ تنتج $w = \log_a z,\ a > 0,\ a \neq 1$

(ii) يمكن كتابة $z = e^{\ln a^w}$

$$z = e^{w \ln a}$$

وبالتالي فإن: $\ln z = w \ln a$

أي أن: $w = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

وبالتالي فإن: $w = \log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

أي أنه يمكن صياغة الدوال اللوغاريتمية بشكل عام عن طريق الدالة $\ln z$.

(iii) باستغلال العلاقة السابقة فإن:

$$w = \log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} = \frac{\ln r}{\ln a} + i\frac{(\theta + 2\pi k)}{\ln a}$$

أي أن علاقات التحويل: $u = \dfrac{\ln r}{\ln a}$

$$v = \frac{\theta + 2\pi k}{\ln a}, \qquad k = 0, \pm 1, .., \qquad \underline{a \neq 1}$$

**مثال ١-١٤:**

أثبت أن التحويل $w = \ln z$ تحويل الدوائر في مستوى $z$ إلى خطوط رأسية في مستوى $w$.

**الإثبات:**

العلاقة $w = \ln z$ تعطي:

$$u = \ln r, \qquad v = \theta + 2\pi k$$

وبأخذ الدالة الأساسية فقط $(k = 0)$ فإن:

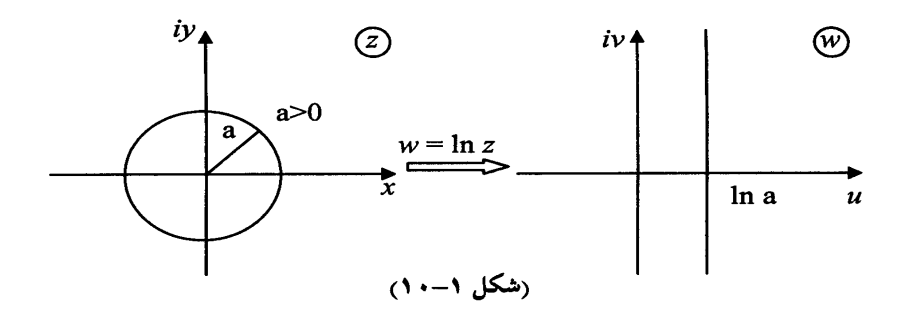
$$u = \ln r$$
$$v = \theta$$

وبالتالي فإن: الدائرة في مستوى $z$: وليكن $|z| = r = a$

فإن $u = \ln a = \text{constant}$

$v = \theta$

أي أن العلاقة هي $u =$ ثابت وهي علاقة خط رأسي كما هو مبين بشكل(١ — ١٠)




(شكل ١—١٠)

وفي حالة كون $a < 1$ فإن $u = \ln a < 0$ في الجزء السالب من المستوى $w$ وفي حالة $a > 1$ فإن $u=\ln a>0$ في الجزء الموجب من المستوى $w$.

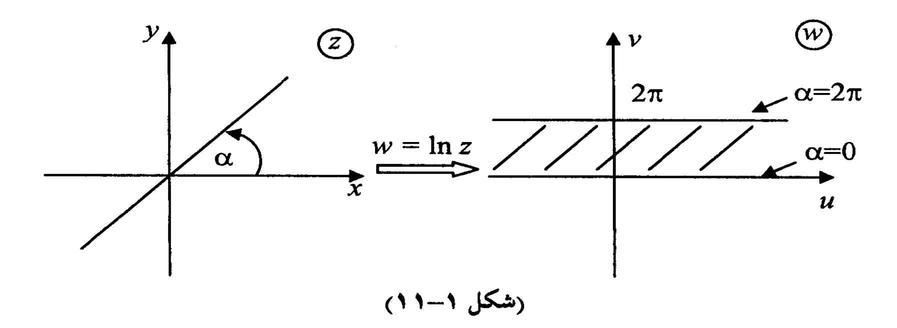
**مثال ١—١٥:**

في نفس المثال السابق .. ماذا يحدث إذا كانت الخطوط في مستوى z تمر بنقطة الأصل؟

**الحل:**

في هذه الحالة فإن (ثابت) $\theta = \alpha$ (كم هو مبين بشكل ١ —١١)

وبالتالي فإن $v = \theta = \alpha$ تعطي خطوط أفقية.




(شكل ١-١١)

ونلاحظ هنا أن المستوى $z$ كله قد تحول إلى شريحة محصورة بين $v=0$ و $v = 2\pi$ في مستوى $w$.

## ١-٢-٨ الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

وتعرف كالآتي:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i}$$

$$\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

علما بأن التعريفات المكتوبة هي للفرع الأساسي فقط .. إذ أن هذه الدوال بشكل عام دوال متعددة القيم.

**مثال ١-١٦:**

إذا اخترنا أن $\sin^{-1}0 = 0$ اثبت أن الدالة (الفرع الأساسي) $\sin^{-1}z$ هو

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

**الإثبات:**

$$w = \sin^{-1} z \Rightarrow z = \sin w$$

أذن:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

أي أن:

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$
$$e^{iw} - 1 = 2iz\, e^{iw}$$
$$e^{2iw} - 2iz\ e^{iw} - 1 = 0$$

وبالتالي:

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

وبالتالي فإن:

$$e^{i(w - 2\pi k)} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$i(w - 2\pi k) = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

or

$$w = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

لجعل $\sin^{-1}0 = 0$ فإن $k=0$ وبالتالي:

$$w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

## ١-٢-٩ الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

ويعرف الفرع الأساسي منها كالآتي:

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z}{1 - z} \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z + 1}{z - 1}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right)$$

**مثال ١-١٧:**

أثبت أن $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

**الإثبات:**

$$w = \tanh^{-1} z \Rightarrow z = \tanh w$$
$$= \frac{\sinh w}{\cosh w}$$
$$= \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$$
$$= \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

وبالتالي

$$z + ze^{2w} = e^{2w} - 1$$
$$e^{2w}(z-1) = -1 - z$$
$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

وبالتالي

$$2w = \ln\frac{1+z}{1-z}$$

أي أن

$$w = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

## ١-٢-١٠ الدوال $w = z^{\alpha}, \quad \alpha \in z$

وهي دوال متعددة القيم ويمكن كتابتها على الصورة اللوغاريتمية

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

فإذا ما كانت $\alpha \in N$ فإنها تصبح وحيدة القيمة.

وللحصول على معادلات التحويل فإننا نجري الآتي:

$$(z)^{\alpha}=u+iv=e^{\alpha \ln z}=e^{(\alpha_1+i\alpha_2)(\ln r+i(\theta+2\pi k))}$$
$$=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))+i(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))}$$
$$=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}[\cos(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))+i\sin(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$

وبالتالي فإن:

$$u=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}\cos(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$v=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}\sin(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

وفي حالة انتماء $\alpha \in \Re$ فان $\alpha_2=0$ وبالتالي

$$u=e^{\alpha_1 \ln r}\cos(\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$v=e^{\alpha_1 \ln r}\sin(\alpha_1(\theta+2\pi k))$$

حيث $\alpha_1=\alpha \in \Re$

**مثال ١-١٨:**

أوجد علاقات التحويل للدالة: $w=z^i$

**الحل:**

$$w=z^i=e^{i\ln z}$$
$$=e^{i(\ln r+i(\theta+2\pi k)}$$
$$=e^{-(\theta+2\pi k)}e^{i\ln r}$$
$$=e^{-(\theta+2\pi k)}(\cos \ln r+i\sin \ln r)$$

إذن

$$\boxed{\begin{aligned}u&=e^{-(\theta+2\pi k)}\cos \ln r\\ v&=e^{-(\theta+2\pi k)}\sin \ln r\end{aligned}}\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

وعلى هذا فإن

i) $$(i)^i=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}(\cos 0+i\sin 0),\qquad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

والغريب أن $(i)^i$ قيمة حقيقية بحتة.

ii) $(a)^i = e^{-(0+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|), \; a \in \Re^+, \;\; z = |a| e^{i(0)}$

$$= e^{-2\pi k} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|)$$

$$(a)^i = e^{-(\pi+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|) \; a \in \Re^-, \;\; z = |a| e^{i(\pi)}$$

وبالتالي فإن

$$(1)^i = e^{-2\pi k} (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$= e^{-2\pi k}$$

أي أن الكمية $(1)^i = e^{-2\pi k}$ كمية حقيقية بحتة.

**مثال ١-١٩:**

التحويلة $w = z^i$ تحول دائرة الوحدة في مستوى $z$ إلى القطعة المستقيمة $[e^{-2\pi}, 1]$، بأخذ الفرع الأساسي فقط.

**الإثبات**

$$w = z^i = e^{-(\theta+2\pi k)} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وعند $k=0$ فإن

$$w = e^{-\theta} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وبالنسبة لدائرة الوحدة فإن $|z| = 1$

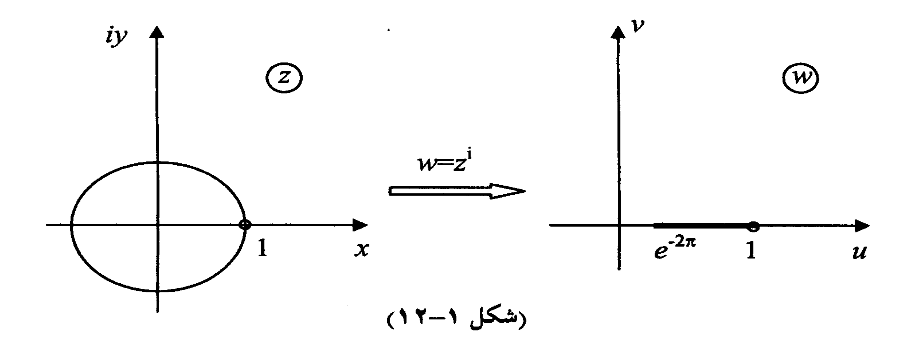
أي أن $r = 1$ وبالتالي

$$w = e^{-\theta} (1 + i\, 0)$$

أي أن $u = e^{-\theta}$

$$v = 0$$

وبالتالي فعند تغير $\theta$ من صفر الي $2\pi$ فإن $u$ تتغير من 1 الي $e^{-2\pi}$ والشكل الآتي يوضح التحويل.




(شكل ١-١٢)

## ١-٢-١١ النقط الفرعية Branch Points

دعنا نقدم للموضوع باستخدام الدالة $w = z^{\frac{1}{3}}$ فإن قيمة $w$ عند النقطة A علـى المسار C في مستوي z والتي تتميز بأن $\theta = \theta_1$ عنـدها فـإن $w_1 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$ لأن $z = re^{i\theta_1}$ عند هذه النقطة. فإذا ما دارت الزاوية $\theta_1$ الى دورة كاملة بحيث تصبح $\theta_1+2\pi$ فإن $w = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi}{3}\right)}$

ونكتشف منها أن $w = w_2 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ وهي قيمة تختلف عن القيمة $w_1$ .. فإذا ما أخذنا دورة أخرى بحيث تكون زاوية z هـي $\theta_1+4\pi$ فـان $w = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1+4\pi}{3}\right)}$ ونكتشف أيضا قيمة ثالثة لـ $w$ حيث

$$w = w_3 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

ولكن هل يستمر الوضع على ذلك .. فإذا أخذنا $\theta_1+6\pi$ فإن

$$w=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+2\pi\right)}$$

$$=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$$

$$=w_1$$

أي أننا نكون قد عدنا مرة أخرى إلى القيمة الأولى .. وهكذا أيضا بالنسبة لـــدورة أخـــرى $\theta_1+8\pi$ إذ نصل إلى $w=w_2$ وعند $\theta_1+10\pi$ نصل الى $w_3$ .. فهناك ثلاث قيم مـــستقلة عن بعضها البعض تعتبر هي التحويل من z الى $w=z^{1/3}$.

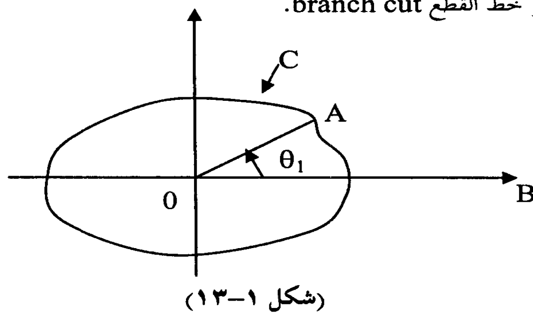
ونصف النتائج التي توصلنا إليها كالآتي:

في حالة $0\leq\theta<2\pi$ هناك فرع من الدالة $w=z^{1/3}$

في حالة $2\pi\leq\theta<4\pi$ هناك فرع ثاني من الدالة $w=z^{1/3}$

في حالة $4\pi\leq\theta<6\pi$ هناك فرع ثالث من الدالة $w=z^{1/3}$

أي أن الدالة $w=z^{1/3}$ دالة عديدة القيم وتتميز بوجود ثلاث فروع مختلفة لها .. كل فـــرع محدد بمنطقة مختلفة للزاوية $\theta$. النقطة التي قيم الدوران حولها لتصنع ذلك تسمى بنقطة التفرع **branch point** وكل فرع من الدالة هو دالة وحيدة القيمة **single-valued** وللحفـــاظ على حد بين كل فرع للدالة والفرع الأخر نصنع خطاً افتراضياً لا يجب تعديه لنظل في الفرع الواحد وهو خط اختياري ويمكن أخذ الخط OB في شكل ١-١٣ ليكون هذا الخط ويسمى بخط التفرع أو خط القطع **branch cut**.




(شكل ١-١٣)

وفي الشكل السابق فإن $z=0$ هي نقطة تفرع للدالة $w=z^{1/3}$ بينما الخط OB (واصل الى مالا نهاية) هو خط التفرع أو خط القطع .. ولا يوجد نقطة تفرع أخرى محددة لهذه الدالة .. ولكن الدالة $w=(z-z_0)^{1/3}$ لها نقطة تفرع عند $z=z_0$ وليس عند $z=0$ إذ هي النقطة الـتي تسمح بالدوران حولها والحصول على الفروع المستقلة الأخرى.

وهكذا نكون قد حددنا مفهوم التفرع ونقاط التفرع وخط القطع الفاصل بين الفروع. وقد جمع ريمان كل هذا في تصور مدهش بتكوين ما يسمى بسطح ريمان Riemann Surfaces .. فإذا تصورنا أن ثلاثة مستويات لـــ z يتم قطعها عند الخط OB ثم يتم لحمها بطريقة تجعل الثلاثة مستويات متصلة .. بذلك نحصل على سطح مستمر له ثلاث مستويات متصلة ببعضها البعض ومن هنا جاءت التسمية للخط OB الوهمي بالقطع cut. وسطح ريمان هذا له شريحتان في حالة $w=z^{1/2}$ وثلاث شرائح في حالة $w=z^{1/3}$ و n من الشرائح في حالة $w=z^{1/n}$ وعدد لانهائي من الشرائح في حالة $w = \ln z$.

## ١-٢-١٢ النهايات Limits

يجري التعريف المعتاد للنهاية على الدالة وحيدة القيمة $f(z)$ كالآتي:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$$

إذا كان

$$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \epsilon$$

لأي عــــدد موجـــــب $\epsilon$ ولأي عـــــدد موجـــــب $\delta$ .. أي أن $f(z)$ تقتـــرب مــــن $\ell$، $\ell$ approaches، إذا ما اقتربت z من $z_0$، $z_0$ approaches، ويجب أن تكــــون النهايــــة مستقلة عن الطريقة التي تؤول فيها z الي $z_0$ .. فإذا كانت هذه النهاية موجودة exists فهي فريدة unique. وفي حالة كون $f(z)$ عديدة القيم فإن قيمة النهاية قد تعتمد على الفرع .. أي أن لكل فرع نهاياته المستقلة عن الفرع الأخر.

فإذا ما آلت $z_0 \to \infty$ فإن تعريف النهاية يأخذ الشكل الآتي:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \ell$$

إذا كان

$$|z| > M \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \epsilon$$

لأي $\epsilon > 0$ وَ $M > 0$.

كذلك فإن $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

إذا ما كان $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > N$

لأي عدد موجب $\delta > 0$ و $N > 0$.

والنهايتان الآتيتان متساويتان

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{w \to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

ويحكم النهايات النظريات الآتية (باختصار):

إذا ما كان $\lim_{z \to z_o} f(z) = A$ و $\lim_{z \to z_o} g(z) = B$

فإن

(i) $$\lim_{z \to z_o} f(z) \pm g(z) = A \pm B$$

(ii) $$\lim_{z \to z_o} f(z) g(z) = A.B$$

(iii) $$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$$

حيث $B \neq 0$.

**مثال ١-٢٠:**

اثبت أن $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غير موجود ($\nexists$)

**الإثبات:**

نعلم أنه إذا ما كانت هناك قيمة للنهاية فلا بد أن تكون فريدة ودعنا نوجد هذه النهاية على مسارين مختلفين

i) المسار الأول Pass 1: على المحور الحقيقي $y = 0$

أي أن $z = x$ وبالتالي $\bar{z} = x$ أيضا و $z \to 0$ تكافئ $x \to 0$ .. أي أن

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

ii) المسار الثاني Pass 2: على المحور التخيلي $x = 0$

أي أن $z = iy \quad , \quad \bar{z} = -iy$

وبالتالي فإن $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{iy}}{\text{- iy}} = -1$

أي أن قيمة النهاية تعتمد على المسار .. وذلك مستحيل وبالتالي فلابد أن نقول أن النهاية غير موجودة أصلا أي أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} \quad \nexists$$

## ١-٢-١٣ الاتصال (الاستمرار) Continuity

مازلنا نسير في نفس فلك التعريفات الأساسية التي سبق استعمالها في حالة الدوال الحقيقية .. فإن $f(z)$ تعتبر دالة متصلة عند النقطة $z_0$ إذا

1. $\lim_{z\to z_0} f(z) \exists$
2. $f(z_0) \exists$
3. $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$

ولا غرابة إطلاقا في استعمال هذه المفاهيم فلقد سبق استعمالها في حالة الأعداد الحقيقية .. وبالتالي فإن $f(z)$ دالة مستمرة في منطقة R من مستوى z إذا ما كانت مستمرة في كل النقاط في R ، $\forall$ points $\in$ R .. أيضا فإنه إذا ما كانت $f(z)$ , $g(z)$ دالتان متصلتان عند النقطة $z=z_0$ فإن $f(z)\pm g(z)$ دالة متصلة وَ $f(z).g(z)$ دالة متصلة وَ $\frac{f(z)}{g(z)}$ دالة متصلة بشرط أن $g(z_0)\neq 0$ .. وبناءً على استعمالنا نفس المفاهيم فإن نفس النتائج تقريباً نحصل عليها كالآتي:

(i) الحدوديات في z والدوال $z^n$ , cos z , sin z , $e^z$ كلها دوال متصلة في كل النقاط continuous everywhere.

(ii) إذا كانت $f(z)$, $g(z)$ دالتان متصلتان فإن $g(f(z))$ تكون دالة متصلة.

(iii) إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة فإن u , v دوال متصلة أيضا حيث $f(z)=u+iv$

(iv) إذا كانت $f(z)$ دالة متـــصلة في منطقـــة مغلقـــة closed region R فـــإن $|f(z)| < M$ أي أنها دالة محدودة.

وكالمعتاد فإنه إذا ما كانت $f(z)$ متصلة عند $z=z_0$ فإننا نعرف أن

$$|z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \in$$

فإذا ما كنا نستطيع الحصول على $\delta$ معتمدة على $\in$ وليس على النقطة $z_0$ فإننا نقول أن الاستمرار منتظم uniformly continuous..

وإذا كانت $f(z)$ مستمرة في منطقة مغلقة Closed region فإنها تكون مستمرة بانتظام في هذه المنطقة.

## ١-٢-١٤ المتتابعات والمتسلسلات

يتبع تعريف المتتابعة وكونها متقاربة أو متباعدة نفس الأسلوب المتبع للأعداد الحقيقية .. فلا جديد في هذا الموضوع .. فأنه إذا كانت

$$w_0, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$$

متتابعة من الأعداد المركبة فإنه $\lim_{n\to\infty} w_n = \ell$

إذا كان لأي عدد موجب $\in>0$ نستطيع إيجاد عدد N معتمداً علـــى $\in$ بحيـــث يكـــون $|\omega_n - \ell| < \in$ لكل $n>N$. ولا جديد في هذا. فإذا ما وجدت هذه النهاية فـــإن المتتابعـــة متقاربة convergent وإذا لم يكن كذلك فإنها متباعدة divergent.

وكذلك فإن $S_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$

تكون متسلسلة محدودة فإذا آلت n الي $\infty$ فان المتسلسلة تصبح لانهائية وهي إما متقاربـــة أو متباعدة كالمعتاد.

---

## تمرينات – ١

١) اثبت أن التحويل $w=\frac{1}{z}$ يحول الدوائر ذات المركز (0,0) في مستوى z الى دوائر ذات المركز (0,0) في مستوى w.

٢) بين أن الخطوط الأفقية في مستوى z تتحول إلى قطع ناقص في مستوى w عندما يكون $w=\sin z$ وما هو تحويل الخطوط الرأسية وما هو التغير الذي سيطرأ على التحويل بأخذ $w=\sin\bar{z}$.

٣) إذا كان $w=u+iv$ فأوجد u, v عندما

$$i)\ w=\frac{a}{z}+z \quad , \quad ii)\ w=ae^{z}$$

$$iii)\ w=z^{4} \quad , \quad iv)\ w=\ln(z-z_0)$$

٤) إذا كان $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ فأوجد تحويل الأشكال الآتية في مستوى z

$$i)\ |z|=R$$

$$ii)\ Arg\ z=\alpha \quad , \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

حيث $\alpha$ : ثابت

$$iii)\ Arg\ z=-\frac{\pi}{2}$$

٥) إذا كانت $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ بحيث يكون

$$\lim_{z\to\infty}w=-1 \quad , \quad \lim_{z\to i}w=0$$

فأوجد $w(z)$.

٦) اثبت أن التحويلة $w=az+b$ , $a,b\in z$ تحافظ على الأشكال الدائرية.

٧) أوجد النقاط الثابتة للتحويلة $w=\frac{2z-5}{z+4}$

**ملاحظة**: النقاط الثابتة هي التي عندها $w=z$

الجواب $(z=-1\pm 2i)$

٨) إذا كانت $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ .. فأوجد صورة التحويلة التي تحول النقاط $z = 0, -i, -1$ إلى $w = i, 1, 0$ على الترتيب.

الجواب $w=\dfrac{i(1+z)}{1-z}$

٩) في المسألة السابقة أوجد التحويل الذي يحول $(-i, 0, i)$ إلى $(-1, i, 1)$ على الترتيب .. ومن ثم أوجد صورة المحور التخيلي في مستوى z.

الجواب $w=\dfrac{z-1}{i(1+z)}$ ، دائرة

١٠) اثبت أن التحويلة المزدوجة الخطية $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}\,z-1}$ حيث $|\alpha|<1$ تحول

(i) $|z| = 1$ إلى $|w| = 1$

(ii) $|z| < 1$ إلى $|w| < 1$

**ملاحظة:** (ضع $z = e^{i\psi}$ , $\alpha = be^{i\lambda}$ حيث $0<b<1$ ثم أوجد $|w|^2$ لإثبات (i) وضع $z=re^{i\psi}, r<1$ في حالة (ii).

١١) أوجد $a, R$ في $w=\dfrac{az-1}{z-i}$ التي تحول $|z| = 1$ إلى $|w|=R$

الجواب $(R=1 \quad , \quad a = -i)$

١٢) إذا كانت $z_0$ نقطة في نصف مستوى $z$ الأعلى $(z_0=x_0+iy_0,\ y_0>0)$ فبين أن $w=e^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$ تحول نصف المستوى الأعلى في مستوى $z$ إلى القرص $|w|\leq 1$.

١٣) اثبت أن $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (ما يسمى بمزدوج الخطية) يحافظ على الأشكال الدائرية.

١٤) اثبت أن $w=\dfrac{z-\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}i\,z-1}$ تحول الدائرة $|z| = 1$ إلى الدائرة $|w| = 1$.

١٥) اثبت المتطابقات الهامة للدوال المركبة المثلثية والزائدية.

١٦) أوجد أصفار الدوال $\sin z$ وَ $\sinh z$ وَ $\cos z$ وَ $\cosh z$

١٧) ناقش وجود النهايات الآتية

i) $\sin \bar{z}$ عند الصفر ii) $\cos \bar{z}$ عند الصفر

iii) $e^{\bar{z}/z}$ عند الصفر

١٨) اثبت أن $\lim_{z\to 0} f(\bar{z})$ غير موجود.

١٩) ناقش تفرع الدالة $w = \ln(z-z_0)$ حول النقطة $z_0$.

# الباب الثاني

## الاشتقاق Differentiation

### ٢-١ مقدمة

كما رأينا سابقاً فإن المفاهيم الأساسية في النهاية والاتصال لم تتغير عن مثيلتها في المتغير الحقيقي وهناك اختلافات يسيرة جداً راجعة الى طبيعة المتغير المركب ودواله التي هي تحويل من مستوى z الى مستوى w كما تم إيضاحه في الباب الأول .. وبالرغم من أن المفهوم الأساسي للاشتقاق لم يتغير أيضا إلا أن النتائج التي سنحصل عليها في هذا الباب غير مسبوقة وليس لها نظير للمتغير الحقيقي وهو ما يعرف بمعادلات كوش – ريمان .. وهى لبّ هذا الباب الأساسي في مادة المتغير المركب.

### ٢-٢ اشتقاق الدوال المركبة Complex function differentiation

إذا كانت $w = f(z)$ دالة وحيدة القيمة في منطقة R من مستوى $z$ فإن اشتقاق $w$ يعرف كالآتي:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

بشرط وجود هذه النهاية مستقلة عن الطريقة التي يؤول فيها $\Delta z$ إلى الصفر.

والجملة الأخيرة هي صاحبة الجديد في هذا الباب.

ويقال حينئذ أن $\bar{f}(z)$ موجود $\exists$ لكل نقطة في المنطقة R $z \in \Re$ $\forall$ وتسمي $f(z)$ بالدالة التحليلية analytic أو الدالة المنتظمة regular أو دالة هولمورفيه holomorphic وهذه الاصطلاحات مرادفة لبعضها البعض تمامـاً .. والدالة $f(z)$ دالة تحليلية عند نقطة $z_0$ طالما كانت $\bar{f}(z)$ موجودة في كل نقاط الجـوار neighbourhood $|z-z_0|<\delta$ لأي عـدد موجب $\delta$.

**مثال ٢-١**

استخدم التعريف لإثبات أن:

$$\frac{d}{dt} z^2 = 2z$$

**الحل:** يتشابه أسلوب الحل هنا تماما مع ما سبق فعله للدوال الحقيقية .. فأيضا

$$\bar{f}(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$
$$=2z$$

وبالتالي فإن
$$\frac{d}{dz}z^2=2z$$

وبالتالي يمكننا إيجاد
$$\bar{f}(1+i)=2(1+i)$$

وهكذا .. ونجد أن كل ما تعلمناه لحذف العامل الصفري في هذه النهاية يمكن تطبيقه بدون تغيير ولا مشاكل إطلاقا إذا أمكن ذلك.

**مثال ٢-٢:**

إذا كانت $w=|z|^2$ فهل يوجد لهذه الدالة اشتقاق؟

**الحل:**

في هذه الحالة $w=z\,\bar{z}$ لأن $|z|^2=z\,\bar{z}$

وبالتالي

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z})-(z)(\bar{z})}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-(z)(\bar{z})}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\bar{z}+\bar{z}\Delta z+z\overline{\Delta z}+\Delta z\overline{\Delta z}-z\bar{z}}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})$$

هنا يجب أن نكون حذرين في أخذ النهاية .. فالمرافق $\bar{z}$ وجود جديد للمتغير المركب ليس له مثيل في دوال المتغير الحقيقي .. ولذلك يجب أن ندرسه بعناية .. فمثلاً هل

$\lim_{\Delta z \to 0} (\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})$ موجود أم غير موجود، ولقد سبق التعامل مع مثل هذه المفاهيم بل أن أحد التمارين في تمرين —١ يقول أن $\lim_{z \to 0} f(\bar{z})$ غير موجود .. فهل هذه النهاية مثلها؟! .. دعنا نرى ذلك .. إذا ما أخذنا المسار $\Delta y=0$ وَ $\Delta x \to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}) = \lim_{\Delta x \to 0} ((x - iy) + (\Delta x) + (x + iy) \frac{\Delta x}{\Delta x}) = 2x$$

وإذا ما أخذنا المسار $\Delta x=0$ وَ $\Delta y \to 0$ فإن

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \to 0} (\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}) &= \lim_{\Delta y \to 0} ((x - iy) - i\Delta y + (x + iy) \frac{-i\Delta y}{i\Delta y}) \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} [(-2iy) - i\Delta y] \\ &= -2iy \end{aligned}$$

ولا يمكن أن يتساوى قيمتا النهايتين فأحدهما حقيقية والأخرى تخيلية .. إذاً يتنافى وجود هذه النهاية لأي نقطة في المستوى z .. وعلى هذا نقول بشكل مطلق أن الاشتقاق غير موجود في أي مكان أي أنها دالة غير تحليلية في أي مكــان non-analytic anywhere وجــدير بالمناقشة هنا أن نقول أنه لإثبات وجود الاشتقاق .. لابد من إثبات أن النهاية لهــا قيمــة لا تعتمد على المسار .. ولكن كيف نثبت ذلك ؟! .. فإذا أخذنا عدد كافي من المسارات وكلها توجد نفس القيمة للنهاية فليس هذا بإثبات كافي لوجود النهاية (أي وجــود الاشــتقاق) .. ولكن العكس صحيح فيكفي أن تختلف قيمة النهاية عند مسارين .. في هذه الحالــة نقــول بتأكيد أن النهاية غير موجودة أي أن الاشتقاق غير موجود. فهذه الطريقة لا تصلح لإثبــات وجود الاشتقاق ولكنه ربما يكون موجوداً ولذلك لا بد من تأكيد الوجود بطريقة أخرى .. أما إثبات عدم الوجود فمتاح.

كذلك لاحظ أيها القارئ أن سبب ذلك هو وجود الدوال غير المسبوقة في المــتغير الحقيقي وهي دوال المرافق مثل $\bar{z}$ و $\overline{\Delta z}$ ويجب التعامل معها بحظر شديد.

**مثال ٢-٣**

أوجد مناطق تحليلية الدالة $w=\dfrac{1+z}{1-z}$

**الحل:**

كالمعتاد فإن

$$\overline{w}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1+z+\Delta z}{1-z-\Delta}-\dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(1+z+\Delta z)(1-z)-(1+z)(1-z-\Delta z)}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1-z+z-z^2+\Delta z-\Delta zz-1+z+\Delta z-z+z^2+\Delta zz}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z)(1-z-\Delta z)}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}$$

بأي طريقة تؤول فيها $\Delta z \to 0$ فإن هذه هي قيمة الاشتقاق .. وبالطبع لابد أن نستثني النقطة $z = 1$. أي أن الاشتقاق موجود في كل المستوي ما عدا $z = 1$. وهي نتيجة لا تصطدم مع معلوماتنا السابقة.

**نظرية ٢-١**

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند نقطة $z$ فأنها أيضا تكون متصلة .. والعكس غير صحيح.

**الإثبات**

بوضع $\Delta z = h$ فإن

$$f(z+h)-f(z)=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.h \quad , \quad h\neq 0$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(z+h)-f(z)\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}.h$

لأن $\exists\bar{f}(z)$ ، $=\bar{f}(z).(0)$

$=0$

وهذا يعني أن $\lim\limits_{h\to 0}f(z+h)=f(z)$

أي أن f(z) دالة متصلة.

ولكن الدالة $f(z)=\bar{z}$ هي دالة مستمرة ولكن اشتقاقها غير موجود (لماذا؟) .. وبالتالي فإن الاستمرار لا يؤدي إلى الاشتقاق ولكن العكس هو الصحيح.

ونلاحظ هنا عدم اصطدمنا بهذا المفهوم فهو يتفق مع معلوماتنا السابقة.

## ٢-٣ قواعد الاشتقاق Differentiation Rules

لا مفاجآت عندنا تحت هذا المسمى .. فقواعد اشتقاق الدوال التحليلية هي نفسها القواعد المتعارف عليها ..

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)\pm g(z)\right)=\bar{f}(z)\pm\bar{g}(z) \qquad (i)$$

$$\frac{d}{dz}c\,f(z)=c\,\bar{f}(z) \qquad (ii)$$

$$\frac{d}{dz}\left(f(z).g(z)\right)=f(z)\bar{g}(z)+\bar{f}(z)g(z) \qquad (iii)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{g(z)\bar{f}(z)-f(z)\bar{g}(z)}{g^2(z)},g(z)\neq 0 \qquad (iv)$$

$(v)$ إذا كان $w=f(z)$ وكان $z=g(\eta)$

فإن قاعدة التسلسل chain rule كالمعتاد هي:

$$\frac{dw}{d\eta}=\frac{dw}{dz}.\frac{dz}{d\eta}$$

وهكذا ..

$(vi)$ إذا كان $w=f(z)$ فإنه إذا وجدت $z=f^{-1}(w)$ فإن

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\left(\frac{dz}{dw}\right)}$$

$(vii)$ كذلك إذا كان $z=f(t)$ وكان $w=g(t)$ فان

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\bar{g}(t)}{\bar{f}(t)},$$

حيث '–' تشير الى تفاضل بالنسبة للبارامتر $t$.

$(viii)$ نفس القواعد المعتادة لما يسمى بالتفاضلة تسري هنا على دوال المتغير المركب بلا حذر .. فمثلاً

$$d(f(z)\pm g(z))=(\bar{f}(z)\pm \bar{g}(z))dz$$

وهكذا.

$(ixx)$ الاشتقاق من رتب أعلى **higher order derivatives** يمكن إجراءه بتكرار التعريف دون حذر طالما كانت $f'(z)$ دالة تحليلية وهكذا يمكن الحصول على $f''(z)$ , $f'''(z)$ $\cdots$ $f^{(n)}(z)$ إذا أمكن ذلك .. ولكن يوجد تميز لدوال المتغير المركب في النظرية التالية:

**نظرية ٢-٢**

إذا كانت f(z) دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z فإنه أيضا يكون $f'(z)$ , $f''(z)$ لأي رتبة، دوال تحليلية في المنطقة ذاتها R. أي أن كل المشتقات من رتب أعلى تتواجد إذا ما وجدت المشتقة الأولى.

$(xx)$ قاعدة لاهوبيتال **L'Hosptal's rule** الشهيرة يمكن تطبيقها أيضا على دوال المتغير المركب فأيضاً إذا كان f(z) , g(z) دوال تحليلية في منطقة R عند نقطة $z_0$ وبافتراض أن $f(z_0)=g(z_0)=0$ ولكن $g'(z_0)\neq 0$ فان:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

وتعمل القاعدة طبقا للإضافات والإمتدادات المعتاد عليها لدوال المتغير الحقيقي دون تغيير يذكر

فيمكن تكرار استعمالها كما يمكن استعمالها لحالات أخرى غير $\frac{0}{0}$ مثل $\frac{\infty}{\infty}$ .. وهكذا.

وكما نرى فإنه لا مفاجآت كبيرة حتى الآن في باب الاشتقاق .. ولا يوجد شئ مميز جدا لاشتقاق دوال المتغير المركب حتى الآن.

## ٢-٤ معادلتي كوشي-ريمان Cauchy-Riemann Equations

بتدقيق أكبر في اعتماد النهاية على المسار .. اثبت كوشي ومعه ريمان هذه النظرية الشهيرة .. وهي التمييز الأكبر في باب الاشتقاق للدوال المركبة عنها للدوال الحقيقية إذ لا يوجد نظرية مماثلة في هذا الفرع ..

**نظرية (٢-٣) كوشي-ريمان**

الشرط الضروري **necessary condition** للدالة $w = f(z) = u + iv$ حتى تكون دالة تحليلية في منطقة R في مستوى $z$ هي أن تحقق كل من $v, u$ هذان الشرطان (ويعرفان بمعادلتي كوشي-ريمان):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**الإثبات:**

نحن الآن نثبت وجود النهاية $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

ولذلك دعونا نكتب $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ بشكل عام ونأخذ المسارين المعتادين اليسيرين وهما $(\Delta y = 0$ وَ $\Delta x \to 0)$ وَ $(\Delta x = 0$ وَ $\Delta y \to 0)$ ونرى ما النتائج التي سنحصل عليها.

دع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

وفي حالة المسار الأول Pass 1 ($\Delta x=0$ وَ $\Delta y\to 0$):

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}\left[u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)\right]$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}\left(u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right)$$

$$+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i}{i\Delta y}\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)$$

وفي الواقع فإن كميات مثل $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{g(x,y+\Delta y)-g(x,y+\Delta y)}{\Delta y}$ سبق التعامل معها وتعريفا على أنها الاشتقاق الجزئي للدالة ثنائية المتغيرات $g(x,y)$ بالنسبة الى y (في حالة عدم تغيير $x$) .. أي أنها تساوي $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ وبالتالي فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

وفي حالة المسار الثاني (pass 2): $\Delta x=0$ وَ $\Delta y\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}(i)\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وأقل متطلب نطلبه هنا أن تتساوى قيمة النهاية على هذين المسارين على الأقـــل (ولـــذلك فالشرط الذي سنحصل عليه هو شرط ضروري ولكنه ليس بكافي) وبالتال فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهما المعادلتان الشهيرتان المعروفتان بمعادلتي كوشي – ريمان.

ونعقب هنا على هذين الشرطين أنهما في حالة عدم تحققهما معاً فإن الدالة تفشل في أن تكون تحليلية .. ولكن في حالة تحققهما معا فإن الدالة ربما تكون تحليلية.

**نظرية ٢–٤ الكفاية Sufficiency**

إذا كانت التفاضلات الجزئية $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ متصلة في نفس المنطقة R في مستوى z التي فيها يتحقق معادلتي كوشي–ريمان فإن f(z) تكون تحليلية.

**الإثبات:**

حيث أن التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ متصلة فإن

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)\\ &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\\ &\quad + u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \in\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta\right)\Delta y\end{aligned}$$

باستعمال مفكوك تايلور ،

حيث $\in, \delta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$ وعندها تتحقق العلاقة

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$ وبالتالي فإن

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \in \Delta x + \delta \Delta y$$

وبالمثل فإن

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \gamma \Delta x + \beta \Delta y$$

حيث $\gamma, \beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$.

وبالتالي فان

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y\end{aligned}$$

وكالمعتاد فإن $\in + i\gamma \to 0$ وَ $\delta + i\beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$

وباستعمال معادلتي كوشي-ريمان فإن

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y\end{aligned}$$

وبالقسمة على $\Delta z$ فإن

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\in + i\gamma)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta + i\beta)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

وبأخذ النهاية عند $\Delta z \to 0$ أي $(\Delta x \to 0$ وَ $\Delta y \to 0)$ فإن $\in + i\gamma \to 0$ وَ $\delta + i\beta \to 0$ وبالتالي

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي فإن التفاضل يكون موجوداً وفريداً وبالتالي فان $f(z)$ تكون دالة تحليلية مع ملاحظة أننا استعملنا معادلتي كوشي-ريمان واستعملنا مفكوك تايلور في البداية الذي يستوجب اتصال الدالتين $u, v$.

**تعقيب:** تقول النظريتان ٢-٣، ٢-٤ أنه إذا ما تحقق معادلتي كوشي-ريمان وكانت التفاضلات الجزئية $u_x, u_y$ وَ $v_x, v_y$ متصلة فإن $f(z)$ تكون دالة تحليلية .. ولا يمكن الاكتفاء بتحقق معادلتي كوشي-ريمان وحدهما كما سبق وذكرنا كما لا يمكن الاكتفاء بشرط الاتصال لأننا استعملنا معادلتي كوشي-ريمان في الإثبات. كذلك فإننا لا ننسى أننا حصلنا على التفاضل في حالة وجوده وهو

$$\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x = \frac{\partial}{\partial x}(w)$$
$$= v_y - iu_y = \frac{\partial}{\partial y}(-iw)$$

وبالتالي يمكننا معرفة الاشتقاق بيسر باستعمال أحد هذه الصيغ وليكن

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x}$$

**مثال ٢-٤:**

أثبت أن $w = \sin \bar{z}$ غير تحليلية في أي مكان وقارن ذلك مع الدالة $w = \sin z$.

الإثبات:

نعلم أن

$$\begin{aligned} w &= \sin z \\ &= \sin(x + iy) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} w &= \sin \bar{z} \\ &= \sin(x - iy) \\ &= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

أذن

$$\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y \quad &, \quad v &= -\cos x \sinh y \\ u_x &= \cos x \cosh y \quad &, \quad v_y &= \sin x \sinh y \\ u_y &= \sin x \sinh y \quad &, \quad v_x &= \sin x \sinh y \end{aligned}$$

ولتحقق معادلتي كوشي-ريمان فلابد

$u_x = v_y \Rightarrow 2\cos x \cosh y = 0$

$u_y = -v_x \Rightarrow 2\sin x \sinh y = 0$

وقيم x التي تجعل $\cos x = 0$ لا تجعل $\sin x = 0$

وكذلك قيم y التي تجعل $\cosh y = 0$ لا تجعل $\sinh y = 0$

وبذلك فنحن لا نجد أي نقاط تتفق فيها هاتين المعادلتين وبالتالي فان $\sin \bar{z}$ غير تحليلية في كل مكان.

وعلى العكس من ذلك فإننا نجد أن معادلتي كوشي-ريمان متحققتان بالنسبة لـــ $\sin z$ ولكن الدوال $\sin x, \cos x$ وَ $\sinh x, \cosh x$ دوال متصلة وتفاضلاتها الجزئية متصلة أيضاً وبالتالي فإن الشرط الكافي محقق كما أن الشرط الضروري محقق أيضاً وبالتالي فإن الدالة $\sin z$ قابلة للاشتقاق في كل مكان.

## ٢-٥ الدوال التوافقية Harmonic Functions

يمكن الجمع بين النظريتين ٢-٣ وَ ٢-٤ في نظرية واحدة بحيث إذا تحققت شروطها فإنها تحتوى شروط النظريتين ٢-٣ وَ ٢-٤ معاً.

**نظرية ٢-٥**

إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية للدوال موجودة ومستمرة في منطقة R في مستوى z فإنها تحقق

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad ,$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة $f(z)$ يحققان معادلـــة لابـــلاس $(\nabla^2 g = 0)$ في متغيرين إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية.

**الإثبات:**

بما أن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وبالتالي من (1) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (3)$$

وبالتالي من (2) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (4)$$

وبجمع (4),(3) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

وحتى نتمكن من إجراء الاشتقاق فإننا نشترط أن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية يجب أن تكون موجودة.

**ملاحظة:**

يطلق على $u$ وَ $v$ تسمية الدوال المترافقة conjugate functions ويمكن في حال معرفة واحدة منهما استنتاج الأخرى.

**مثال ٢-٥**

a) اثبت أن الدالة $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ دالة توافقية

b) أوجد $v$ المرافقة لـ $u$

c) أوجد $f(z) = u + iv$

الحل

$u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ (a

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(\sin y) + e^{-x}(x \sin y - y \cos y) \quad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y + y \sin y - \cos y)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \sin y + y \cos y + \sin y + \sin y) \quad (2)$$

وبجمع (١) و (٢):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} \sin y - e^{-x} \sin y + e^{-x} x \sin y - e^{-x} y \cos y$$

$$+ 2e^{-x} \sin y - e^{-x} x \sin y + e^{-x} y \cos y$$

$$= 0$$

أي أن $u$ تحقق معادلة لابلاس **Laplace equation**

$$\nabla^2 u = 0$$

وبالتالي فإن $u$ دالة توافقية.

b) والآن باستعمال معادلتي كوشي-ريمان فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}\sin y - e^{-x}x\sin y + e^{-x}y\cos y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}x\cos y + e^{-x}y\sin y - e^{-x}\cos y \qquad (4)$$

من (3) وبالتكامل بالنسبة الى $y$ فإن

$$v = -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}\int y\cos y\,dy$$
$$= -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}[y\sin y - \int \sin y\,dy]$$
$$= -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y + F(x)$$

أي أن

$$v(x, y) = x\,e^{-x}\cos y + y\,e^{-x}\sin y + F(x)$$

وبتفاضل هذه الدالة جزئياً بالنسبة الى $x$ فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y + F'(x)$$

ولكن من (4) فإن

$$-xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y + F'(x) = -e^{-x}x\cos y - e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y$$

أي أن $F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = A$

وبالتالي فإن

$$v(x, y) = x\,e^{-x}\cos y + y\,e^{-x}\sin y + A$$

$$\boxed{v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + A}$$

وهي الدالة المرافقة المطلوبة.

٢) والآن فإن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية ولإيجادها كدالة في $z$ فأننا نستعمل

$$z = x + iy \qquad , \qquad \bar{z} = x - iy$$

أي أن

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad , \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

وأي متطابقات أخرى مفيدة مثل أن $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ .. وهكذا

وفي حالتنا هذه فإن

$$\begin{aligned}
f(z) &= u + iv \\
&= e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + ie^{-x}(x \cos y + y \sin y) + iA \\
&= e^{-x}x (\sin y + i \cos y) + e^{-x}y (- \cos y + i \sin y) + iA \\
&= e^{-x} x \underline{(\sin y + i \cos y)} + e^{-x} y i \underline{(\sin y + i \cos y)} + iA \\
&= e^{-x} (\sin y + i \cos y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i (\cos y - i \sin y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i e^{-iy} z + iA \\
&= i e^{-z} z + iA
\end{aligned}$$

أذن الدالة التحليلية $f(z)$ هي:

$$\boxed{f(z) = iz e^{-z} + iA , A \in \Re}$$

**ملاحظات:**

(i) هناك أكثر من أسلوب للوصول إلى نفس النتيجة السابقة .. فمن $u$ نوجد $v$ ويمكن من $v$ نوجد $u$ وكذلك من $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ نوجد $v$ وكذلك من $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ نوجد $v$ أيضا وهكذا .. على أن النتيجة يجب أن تكون فريدة كدالة في $z$.

(ii) نلاحظ أن دالة $f(z)$ المستنتجة تعتمد على ثابت عام وبالتالي فنظريا نحن نملك عدد لانهائي من الحلول والانفراد يكون في الجزء المعتمد على $z$ فقط.

(iii) إذا علمنا من الدالة $f(z)$ الجزء الحقيقي فقط (مثلاً)، فإنه وبدون معرفة $v$ يمكننا إيجاد $\frac{df}{dz}$ باستعمال

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

وأيضا معرفة $v$ فقط تمكن من ذلك أيضاً باستعمال

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

ويجب الالتفات الى ذلك في حالة طلب مشتقة $f(z)$ فقط دون معرفة $f(z)$.

ففي المثال السابق

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y-i\left(e^{-x}x\cos y+e^{-x}y\sin y-e^{-x}\cos y\right)$$

$$=e^{-x}(\sin y+i\cos y)-e^{-x}(x\sin y+ix\cos y)+e^{-x}(y\cos y-iy\sin y)$$

$$=e^{-x}i(\cos y-i\sin y)-e^{-x}xi(\cos y-i\sin y)+e^{-x}y(\cos y-i\sin y)$$

$$=e^{-x}i\,e^{-iy}-e^{-x}xie^{-iy}+e^{-x}ye^{-iy}$$

$$=e^{-(x+iy)}i[1-x-iy]$$

$$=e^{-(x+iy)}i(1-(x+iy))$$

$$=ie^{-z}(1-z)$$

وهو ما يمكن التأكد منه بتفاضل $f(z)$

$$f(z) = i\,z\,e^{-z} + i\,A$$

$$f'(z) = i\,(-z\,e^{-z} + e^{-z}) + 0$$

$$= i\,e^{-z}\,(1-z)$$

وهى نفس النتيجة.

## ٢-٦ معادلتي كوشي – ريمان في الصورة القطبية

## Cauchy-Riemann equations in polar form

في كثير من الحالات يكون من الأفضل استعمال الصورة القطبية للمتغير المركب وهي $z = r\,e^{i\theta}$. وبالتالي فيجب تعديل المعادلات من $(x,y)$ إلي $(r,\theta)$

**عارض ٢-١** معادلتي كوشي-ريمان في الصورة القطبية هما

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**الإثبات:**

إثبات هذين المعادلتين يتم بعملية تحويل فقط للمعادلات الأصلية من $(x,y)$ إلي $(r,\theta)$ باستعمال

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

كالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (2)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (3)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta \qquad (4)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$$

ومن استقلال الدوال $\cos\theta, \sin\theta$ فإنه لابد أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**ملاحظة:**

(i) معادلة لابلاس في الصورة القطبية هي

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0$$

ومن اليسير إثبات أن $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ تحققان معادلة لابلاس في الصورة القطبية.

**مثال ٢-٦**

اثبت أن $w=z^n$ دالة تحليلية حيث $n\in N^+$

**الإثبات**

نلاحظ أنه إذا استعملنا الصورة الكارتيزية $z=x+iy$ فإن فك المقدار $(x+iy)^n$ والحصول على $v,u$ أمر صعب ولكن باستعمال الصورة القطبية فإن الأمر أيسر بكثير حيث $z=r\,e^{i\theta}$

فإن
$$z^n=r^n\,e^{i\theta}=r^n\,(\cos n\,\theta+\sin n\,\theta)$$

وبالتالي فإن

$$u=r^n\cos n\,\theta$$
$$v=r^n\sin n\,\theta$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-nr^n\sin n\theta$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-n^2r^n\cos n\theta$$

وبالتالي فإن

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta+nr^{n-2}\cos n\theta-n^2r^{n-2}\cos n\theta$$
$$=0$$

أي أن $\nabla^2 u=0$ وبالمثل يمكن إثبات أن $\nabla^2 v=0$

وبالتالي فإن $u,v$ دوال توفيقية أي أن $w=z^n$ دالة تحليلية

**مثال ٢-٧**

اثبت أنه إذا كان $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

**الإثبات**

باستعمال
$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

فان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$=u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta$$

وكذلك فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_r\cos\theta-\frac{1}{r}v_\theta\sin\theta$$

وبالتالي فإن

$$\frac{df}{dz}=u_x+iv_x$$
$$=(u_r+iv_r)\cos\theta-\frac{1}{r}(u_\theta+iv_\theta)\sin\theta$$
$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

مثال ٢–٨

أوجد $\frac{df}{dz}$ في حالة $f(z)=z^n$ , $n \in N^+$

الإثبات

$$f(z)=r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta$$

إذن باستعمال الصيغة السابقة في مثال ٢–٧ فإن

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz}&=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\\
&=\left(nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta\right)\cos\theta\\
&\quad-\left(-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta\right)\frac{\sin\theta}{r}\\
&=nr^{n-1}(\cos n\theta+i\sin n\theta)\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}(-\sin n\theta+i\cos n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}i(\cos n\theta+i\sin n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta-nr^{n-1}e^{in\theta}i\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta}\\
&=nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\\
&=n\,z^{n-1}
\end{aligned}$$

أي أن $\frac{d}{dz}\left(z^n\right)=n\,z^{n-1}$ , $n \in N^+$ .

**مثال ٢-٩**

اثبت أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z وكان $\bar{f}(z)=0$ , $z \in \Re$ فإن (ثابت) $f(z)=\alpha$ .

**الإثبات**

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $\bar{f}(z)=0$ .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

وهذا معناه أن $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ .. أي أن $u=f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ .. أي أن $v=f_2(y)$

ولكن من معادلتي كوشي-ريمان يكون $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_4(x)$

ولا يمكن أن يكون ذلك إلا إذا كان

$u$ = ثابت = $\alpha_1$

$v$ = ثابت = $\alpha_2$

| وبالتالي فإن ثابت: $f(z)=\alpha$ |
|---|

**مثال ٢-١٠**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R فاثبت إنه إذا كان ثابـــت: $u = \alpha$ فـــإن $f(z)$ تساوي ثابت أيضاً.

**الإثبات**

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية في R فان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $u = \alpha$ فان $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_2(y)$

ولا يمكن ذلك إلا إذا كان ثابت = $v$

وبالتالي فإن ثابت = $f(z)$

**ملاحظة:**

والعكس صحيح أيضاً فإذا كانت (ثابت) $v = \alpha$ فإن $f(z)$ التحليلية يجب أن تساوي ثابت أيضاً.

**مثال ٢-١١**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكان ثابت: $|f(z)| = \alpha$ فـــإن $f(z)$ تـــساوي ثابت أيضاً.

**الإثبات**

$f(z)$ دالة تحليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $|f(z)| = \alpha \Leftarrow u^2 + v^2 = \alpha^2$

أي أن $u^2 = \alpha^2 - v^2$

وبالتالي:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} = -2v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

$$2u\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

بضرب (1) في $v$ فإن

$$uv\frac{\partial u}{\partial x} = -v^2\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

بضرب (2) في $u$ فإن

$$uv\frac{\partial v}{\partial y} = -u^2\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

ولكن باستعمال معادلتي كوشي-ريمان وطرح (3) من (4) فإن

$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ولكن $u^2+v^2 = \alpha^2 \neq 0$ فإن $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ وبالتالي فإن $u = f_1(x)$

كذلك فإن $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ أي أن $v = f_2(y)$

وبالمثل فإنه بضرب (1) في $u$ وضرب (2) في $v$ فإننا نصل إلى

$$u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} = -uv\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5)$$

$$v^2\ \frac{\partial v}{\partial y} = -uv\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

وبجمع (5) وَ (6) فإن

$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

أي أن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. وبالتالي $u = f_3(y)$

كذلك بأن $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_4(x)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان

$u = \alpha_1$ (ثابت)

$v = \alpha_2$ (ثابت)

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

### مثال ٢-١٢

إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية في R وكان $w = v + iu$ دالة تحليلية أيضاً .. فأثبت أن : $f(z) = \alpha$ ، ثابت: $\alpha$.

**الإثبات**

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $w = v + iu$ دالة تحليلية أيضا .. فلا بد أن

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (4) فإن $2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_2(y)$

من (2) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_4(y)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان

$$u = \alpha_1 \text{ (ثابت)}$$

$$v = \alpha_2 \text{ (ثابت)}$$

أي أن (ثابت) $f(z)=\alpha$ .

**مثال ٢-١٣:**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكانت $f(z)$ دالة حقيقية فإن ذلك معناه أن $f(z)$ دالة ثابتة.

**الإثبات:**

كالمعتاد فإن $f(z)$ دالة تحليلية فيجب أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $f(z)$ دالة حقيقية .. أي أن $v = 0$

وبالتالي فإن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_2(x)$

وهذا لا يمكن حدوثه إلا إذا كان $u = \alpha$ ثابت

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

**مثال ٢-١٤**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكان $\overline{f(z)}$ أيضاً دالة تحليلية فإن ذلك لا يحدث الا اذا كانت $f(z)$ ثابتة.

**الإثبات**

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $\overline{f(z)} = u - iv$ دال تحليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وبالتالي $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_2(x)$

من (2) و (4) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_4(y)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان $u = \alpha_1$ وَ $v = \alpha_2$ أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

**مثال ٢-١٥**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية وكان $|f(z)|$ دالة تحليلية أيضاً .. فلا بد أن تكون $f(z)$ ثابتة.

**الإثبات**

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. إذاً

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

والآن $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ دالة تحليلية (وهي دالة حقيقية أيضاً) .. إذاً

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2 + v^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2 + v^2} = 0$$

أي أن (ثابت) $\sqrt{u^2 + v^2} = \alpha$

ومن المثال ٢-١١ حيث أن (ثابت) $|f(z)| = \alpha$ فإنه لابد أن يكون $u = \alpha_1$ وَ $v = \alpha_1$

أي أن $f(z) = \beta$.. أي دالة ثابتة.

**مثال ٢-١٦**

اثبت أن الدالة $f(z) = |z(z-1)|$

غير تحليلية في أي مكان.

**الإثبات**

بما أن $f(z) = u$ دالة حقيقية فقط

فإذا افترضنا أنها دالة تحليلية فإنها يجب أن تكون ثابتة طبقا لما أثبتناه في مثال ٢-١٣ .. ولكن

$$|z(z-1)| = |z||z-1|$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

أي أن المطلوب أن

ثابت $(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + y^2] = \alpha^2$

ولا يمكننا أن نوجد علاقات بين $x$ و $y$ تفي بهذه العلاقة الماضية فإذا وضعنا ثابت = $x^2+y^2$ (علاقة دائرة) فإننا نحصل على علاقة دائرة أخرى ثابت = $(x-1)^2+y^2$ .. وهذا تعارض والعكس أيضا غير ممكن ولا نستطيع ايجاد علاقة حقيقية بحيث نجعل $x^2+y^2=0$ أو $(x-1)^2+y^2=0$ .. وبالتالي لا يمكن تحقيق هذه العلاقة .. وهذا تعارض أي أن $f(z)$ دالة غير تحليلية .. وحيث أننا لا نستطيع إيجاد ولو حالة واحدة .. فان الدالة غير تحليلية في أي مكان.

**مثال ٢-١٧**

إذا كانت $w = z^3$

فأوجد $\Delta w$ , $dw$ , $\Delta w - dw$

**الحل:**

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(z+\Delta z) - f(z) \\
&= (z+\Delta z)^3 - z^3 \\
&= z^3 + 3z^2\Delta z + 3\,z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - z^3 \\
\Delta w &= 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3
\end{aligned}$$

وكذلك

$$w = z^3$$
$$dw = (3z^2)\,dz$$

وهي كما نلاحظ الجزء الأساسي في علاقة $\Delta w$ (حيث $\Delta z = dz$)

والآن

$$\begin{aligned}
\Delta w - dw &= 3z\,(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \\
&= (3z\,\Delta z + (\Delta z)^2)\,\Delta z \\
&= \in \Delta z
\end{aligned}$$

ونلاحظ أن $\in \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وبالتالي فإن $\dfrac{\Delta w - dw}{\Delta z} \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وهذا يعني أن $\Delta w\text{-}dw$ كميات منتهية الصغر ولكنها في رتبة أعلى من $\Delta z$.

## ٢-٧ اشتقاق الدوال الأولية Derivatives of elementary functions

مازلنا نطلق على الدوال المعتادة مثل $z^n$ والدوال التي تسمى المثلثية والدوال الأسية والدالة اللوغاريتمية والدوال الزائدية ودوالها العكسية أيضاً بالدوال الأولية .. ولا مفاجآت في اشتقاق هذه الدوال في حالة الدوال المركبة .. فجدول الاشتقاق مشابه تماماً لمعلوماتنا السابقة .. والأمثلة التالية فيها بعض الإثباتات.

**مثال ٢-١٨**

أثبت أن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

**الإثبات:**

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$$

وبالتالي فإن

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

وهى دالة تحليلية (من اليسير إثبات ذلك) ..

$$\begin{aligned}\frac{de^z}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y\\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right)\\ &= e^x e^{iy}\\ &= e^z\end{aligned}$$

إذن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

**مثال ٢-١٩**

إثبت أن $\frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z$

**الإثبات:**

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$= \cos z$$

إذن

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

**مثال ٢-٢٠**

أثبت أن $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$

**الإثبات**

$$w = \ln z \Rightarrow z = e^{w}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{dz}{dw} = e^{w} = z$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dw}\right)} = \frac{1}{z}$$

وهذه النتيجة صحيحة بغض النظر عن القيمة التفرعية للدالة $w = \ln z$ فهي صالحة لكل الفروع .. ولكن التفاضل غير موجود عند نقطة التفرع $(z = 0)$.

**مثال ٢-٢١**

اثبت أن

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^{2}}}$$

**الإثبات**

من تعريف الدالة

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1-z^2}}.\left(i - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1-z^2}}.\frac{-z + i\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{i(iz + \sqrt{1-z^2})}.\frac{i(iz + \sqrt{1-z^2})}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

وهذه القيمة للتفاضل صالحة لكل فروع الدالة.

**مثال ٢-٢٢**

اثبت أن $\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \alpha\, z^{\alpha-1}$ حيث $\alpha \in C$

**الإثبات**

بوضع الدالة

$$z^{\alpha} = e^{\ln z^{\alpha}} = e^{\alpha \ln z}$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \frac{d}{dz}e^{(\alpha \ln z)}$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=e^{\alpha \ln z}.\alpha \frac{1}{z}$$
$$=\alpha(z)^{\alpha}.\frac{1}{z}$$
$$=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

إذن

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

وهذا القانون صالح لكل تفرعات الدالة إذا وجدت هذه التفرعات.

**مثال ٢-٢٣**

أوجد مشتقة $(z+1)^{z-1}$

**الحل**

يحق لنا استعمال طرق الاشتقاق التي تدربنا عليها للدوال الحقيقية ففي هذه الحالة

نضع $w=(z+1)^{z-1}$

وبالتالي فإن $\ln w = (z-1).\ln(z+1)$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dz}=(z-1).\frac{1}{z+1}+\ln(z+1)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{dw}{dz}=w\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

أي أن

$$\frac{d}{dz}(z+1)^{z-1}=(z+1)^{z-1}\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

**حل أخر:**

$$w=(z+1)^{z-1}=e^{\ln(z+1)^{z-1}}$$
$$=e^{(z-1)\ln(z+1)}$$

وبالتالي:

$$\frac{dw}{dz} = e^{(z-1)\ln(z+1)} \cdot \left[ (z-1)\frac{1}{z+1} + \ln(z+1)(1) \right]$$

$$= w\left[ \frac{(z-1)}{z+1} + \ln(z+1) \right]$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

**ملاحظة هامة**

كما سبق فإن تعريفات الدوال الأولية واشتقاقها يتبع نفس الشكل الذي تعارفنا عليه للدوال الحقيقية مع الأخذ في الاعتبار طبيعة بعض الدوال التي هي عديدة القيم وتفاضلها أيضاً ربما تكون دوال عديدة القيم فيجب الانتباه لذلك .. كما يجب الانتباه دائما إلى أن التفاضل غير موجود عند نقاط التفرع.

والجدول التالي يوضح الدوال الأولية واشتقاقها.

1. $\frac{d}{dz}(C)=0$
2. $\frac{d}{dz}u^n = nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dz}$
3. $\frac{d}{dz}\sin u = \cos u\cdot\frac{du}{dz}$
4. $\frac{d}{dz}\cos u = -\sin u\cdot\frac{du}{dz}$
5. $\frac{d}{dz}\tan u = \sec^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
6. $\frac{d}{dz}\cot u = -\csc^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
7. $\frac{d}{dz}\sec u = \sec u\tan u\cdot\frac{du}{dz}$
8. $\frac{d}{dz}\csc u = -\csc u\cot u\cdot\frac{du}{dz}$
9. $\frac{d}{dz}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dz}, a>0, a\neq 1$
10. $\frac{d}{dz}\log_a u = \frac{d}{dz}\ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dz}$
11. $\frac{d}{dz}a^u = a^u\ln a\cdot\frac{du}{dz}$
12. $\frac{d}{dz}e^u = e^u\cdot\frac{du}{dz}$
13. $\frac{d}{dz}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$
14. $\frac{d}{dz}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$
15. $\frac{d}{dz}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dz}$
16. $\frac{d}{dz}\cot^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dz}$
17. $\frac{d}{dz}\sec^{-1} u = \pm\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}\begin{cases}+ & u>1\\ - & u<-1\end{cases}$
18. $\frac{d}{dz}\csc^{-1} u = \mp\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}\begin{cases}- & u>1\\ + & u<-1\end{cases}$
19. $\frac{d}{dz}\sinh u = \cosh u\cdot\frac{du}{dz}$
20. $\frac{d}{dz}\cosh u = \sinh u\cdot\frac{du}{dz}$
21. $\frac{d}{dz}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
22. $\frac{d}{dz}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
23. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u\tanh u\cdot\frac{du}{dz}$
24. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u\coth u\cdot\frac{du}{dz}$
25. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$
26. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}$
27. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dz}, |u|<1$
28. $\frac{d}{dz}\coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dz}, |u|>1$
29. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}$
30. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{du}{dz}$

(جدول ٢-١)

## ٢-٨ النقاط الشاذة Singular Points

النقاط التي تفشل عندها $f(z)$ في أن تكون دالة تحليلية يقال عليها نقـــاط شـــاذة Singular Points .. وهذا عرض موجز بأنواع النقاط الشاذة:

### ٢-٨-١ الشواذ المعزولة Isolated Singularities

إذا ما استطعنا إيجاد $\delta > 0$ بحيث لا تحتوي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ إلا نقطـــة شـــاذة واحدة للدالة $f(z)$ عند $z=z_0$ .. فإن $z=z_0$ يقال عليها بالنقطة الشاذة المعزولة Isolated Singularity.

وعلى النقيض من ذلك (إذا لم تحتوي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ أي نقاط شاذة) يقال على النقطة $z=z_0$ بالنقطة العادية أو المنتظمة Ordinary Point.

### ٢-٨-٢ نقاط التفرع Branch Points

وهي نقاط شاذة للدوال ذات القيم المتعددة multi-valued functions وهي نقاط عامة لجميع تفرعات الدالة branches وعندها تكون الدالة غير تحليلية لكل التفرعات .. على سبيل المثال

(i) $f(z)=(z-2)^{\frac{1}{n}}, n \in N^+$ .. عند $z = 2$

(ii) $f(z) = \ln(z - 3 + i)$ .. عند $z = 3-i$

(iii) $f(z) = \ln(z^2 - 1)$ .. عند $z = \pm 1$

### ٢-٨-٣ الشواذ الاعتباريون Removable Singularities

وهي تلك النقاط التي للدالة $f(z)$ نهاية عندها .. أي أن

إذا كان $\quad \exists \quad \lim_{z \to z_0} f(z)$

فإن $z = z_0$ وإن كانت تبدو شاذة الا أنه يمكن تعريف الدالة بقيمة النهايـــة عنـــد $z = z_0$ وبالتالي نكون قد أزلنا هذا الشذوذ ولذلك فالشذوذ هنا يمكن أن يكون اعتبارياً فقط .. على سبيل المثال

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1 \quad , \quad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z}=0,$$

### ٢-٨-٤ الأقطاب Poles

وهي نوع مميز من النقاط الشاذة وأكثرها استعمالا وخاصة في نظريات التكامل القادمة .. وتعرف كالآتي:

**تعريف .. القطب Pole**

إذا كان $\lim (z-z_0)^m f(z) = A \neq 0$ حيث $m\in N^+$ وَ $A$ عدد محدود.

فإن $z = z_0$ يقال عليه قطب من الرتبة $m$.

وفي حالة $m=1$ فإن القطب يطلق عليه عادةً قطباً يسيراً a simple pole.

**مثال ٢-٢٤**

الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)^3}$

لها نقطتان شاذتان من نوع القطب .. (أو بيسر أكثر لها قطبان)

القطب الأول عند $z=1$ من النوع اليسير (لأن $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)\neq 0$ )

والقطب الثاني عند $z=3$ ومن الرتبة الثالثة (لأن $\lim_{z\to 3}(z-3)^3 f(z)\neq 0$ )

لاحـــظ أن $\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)\to\infty$ وأن $\lim_{z\to 3}(z-3)^2 f(z)\to\infty$ وبالتـــالي فالرتبة هنا من الرتبة الثالثة.

### ٢-٨-٥ الشواذ الأساسية Essential Singularities

النقطة الشاذة التي ليست قطباً أو نقطة تفرع أو نقطة شاذة اعتبارية يقال عليها نقطة شاذة أساسية essential singularity .. على سبيل المثال

$f(z)=\ln\dfrac{1}{z-2}$ عند $z=2$ .. أو $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$ عند $z=i$ .. وهكذا

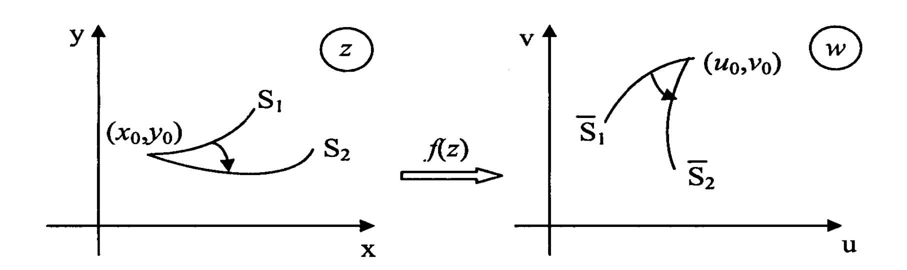
فهذه النقاط لا يمكن إزالتها كما إنها ليست أقطاباً وليست نقاط تفرع .. فهي بالتالي نقـــاط شاذة أساسية.

## ٢-٩ التحويل المحافظ Conformal mapping

تلعب تحليلية الدالة $f(z)$ دوراً هاماً في هذا النوع من التحويل

**تعريف: التحويل المحافظ**

لنفرض أن $f(z)$ تحول النقطة $(x_0,y_0)$ في مستوى $z$ إلى النقطة $(u_0,v_0)$ في مستوى $w$ كما هو واضح بالشكل (٢-١) وأن المنحنيين المتقـــاطعين عنـــد $(x_0,y_0)$ ، $S_1$ وَ $S_2$ يتحولان الى المنحنين المناظرين المتقاطعين عند $(u_0,v_0)$ ؛ $\bar{S}_1$ وَ $\bar{S}_2$ (كما هو مبين بشكل ٢-١)




**(شكل ٢-١)**

فإن التحويل يسمى محافظاً إذا ما حافظ على الزاوية بين المنحنيين في المقدار والحس magnitude and sense.

وبالطبع يعلم القارئ أن الزاوية بين المنحنيين هي الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين عند نقطة التقاطع .. وأن المحافظة على الزاوية من حيث الحس معناه أن اتجاه الدوران من منحنى إلى آخر لا يتغير عند التحويل .. والتحويل الذي يحافظ على المقدار فقط ولا يحافظ على الحس هـــو تحويل غير محافظ isogonal mapping.

**عارض –٣**

التحويل من مستوى $z$ إلى مستوى $w$ يكـــون أحاديـــا one-to-one (النقطـــة الواحدة في المستوى $z$ تتحول الى نقطة وحيدة فى مستوى $w$ والعكس صحيح) إذا كانـــت $f(z)$ دالة تحليلية وكان معامل التحويل (الجاكوبيان Jacobian)

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

والنقاط التي عندها $J = 0$ تسمي نقاط حرجة.

**عارض – ٤**

في حالة كون $f(z)$ دالة تحليلية فإن $J=\left|\bar{f}(z)\right|^2$

**الإثبات**

دع $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية في R

أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وهي معادلات كوشي–ريمان متحققة في نفس المنطقة R.

وبالتالي فإن

$$J=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v_y & u_y\\ -u_y & v_y\end{vmatrix}=v_y^2+u_y^2$$

ولكن $\bar{f}(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$

أي أن $\left|\bar{f}(z)\right|^2=v_y^2+u_y^2$

أي أن $J = \left|\bar{f}(z)\right|^2$

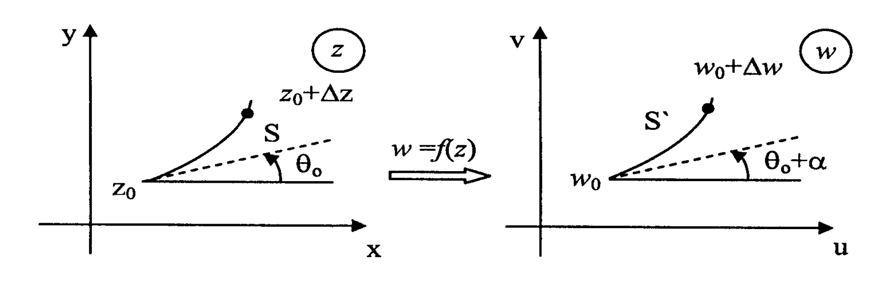
**نظرية ٢-٦**

**التحويل المحافظ Conformal Mapping**

إذا كانت $f(z)$ $\left(\bar{f}(z) \neq 0\right)$ دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z فإن التحويل $w = f(z)$ يكون تحويلاً محافظاً.

**الإثبات:**

سنثبت أولاً أنه تحت هذا التحويل فإن المماس للمنحنى S عند النقطة $z=z_0$ في مستوى $z$ يدور بزاوية $Arg\left(\bar{f}(z_0)\right)$ في مستوى $w$ (شكل ٢-٢)




**(شكل ٢-٢)**

عند انتقال النقطة من $z_0$ الى $z_0 + \Delta z$ على المنحنى S فإن النقطة $w_0$ تنتقل الى $w_0 + \Delta w$ على المنحنى `S كما هو مبين بشكل (٢-٢) .. فإذا كان $z = z(t)$ هو المنحنى البارامتري في مستوى $z$ فإن $w = w(t)$ هو المنحنى البارامتري في مستوى $w$.

وبالتالي. فإن متجه المماس في مستوى $z$ هو $\frac{dz}{dt}$ وكذلك متجه المماس في مستوى $w$ هو $\frac{dw}{dt}$ .. أي أن

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=\bar{f}(z)\frac{dz}{dt}$$

وذلك عند $z_0$ و $w_0$ أي أن

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0}=\bar{f}(z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$$

وبكتابة $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0}$ بصور قطبية وكذلك $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0}=\rho_o e^{i\phi_o},\bar{f}(z)=\mathrm{Re}^{i\alpha},\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}=r_o e^{i\theta_o}$$

فإننا سنجد أن

$$\rho_o e^{i\phi_o}=\mathrm{Re}^{i\alpha}.r_o e^{i\phi_o}$$

وبالتالي

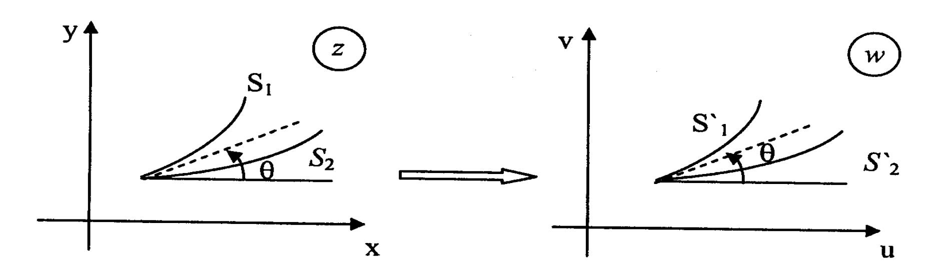
$$\rho_o=Rr_o$$
$$\phi_o=\alpha+\theta_o$$
$$=\theta_o+\arg\bar{f}(z_0)$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\phi_o=\theta_o+\arg\bar{f}(z_0)}$$

فالزاوية الجديدة هي الزاوية القديمة مضافة إليها زاوية محددة $\alpha$ وهذا مجرد دوران.

**والآن** إذا كان هناك منحنيان $S_1$ وَ $S_2$ بينهما زاوية $\theta$ في مستوى $z$ ودار كل منهما في مستوى $w$ بنفس الزاوية $\alpha$ فإن الزاوية بين المنحنيين ستظل $\theta$، (شكل ٢-٣)




**(شكل ٢-٣)**

**عارض – ٥**

إذا كانت $w = f(z) = u + iv$ دالة تحليلية بحيث يكون $u = \alpha,\ v = \beta$ تكون شبكة من المنحنيات (الخطوط) المتعامدة في مستوى $w$ فإن المنحنيات المناظرة لها في مستوى $z$ تكون منحنيات متعامدة أيضاً.

**الإثبات:**

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

والآن على المنحنى $u(x, y) = \alpha$ وَ المنحنى $v(x, y) = \beta$ في مستوى $z$ (شكل٢-٤) فإن:

$$du = 0$$

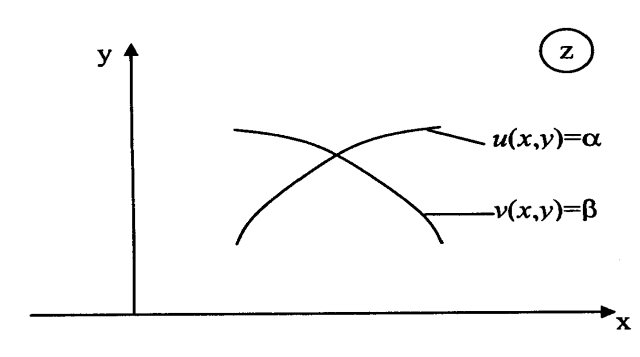
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

كذلك $dv = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

من (3) فإن $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$ : ميل المنحنى $u(x, y)=\alpha$

ومن (4) فإن $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$ : ميل المنحنى $v(x,y)=\beta$




(شكل ٢-٤)

وبالتالي فإن حاصل ضرب الميلين (مع استعمال (١)، (٢))

$$\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_y}{u_y}\cdot\frac{-u_y}{v_y}=-1$$

أي أن المنحنيان يكونا متعامدين.

## ٢-٩-١ بعض الأمثلة على التحويل الحافظ Some Examples on Conformal Mapping

### ٢-٩-١-١ التحويل الانتقالي Translation

ويأخذ الصورة $w = z + \beta \quad , \quad \beta \in C$

تنتقل الأشكال في مستوى $z$ إلى أشكال مناظرة في مستوى $w$ في اتجاه المتجه $\beta$.

**مثال ٢-٢٥:**

المحور التخيلي في مستوى $z$ ينتقل إلى خط رأسي في مستوى $w$.

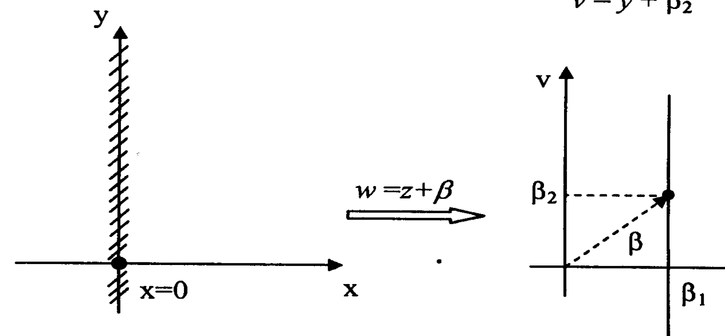
**الإثبات:**

المحور التخيلي هو $x = 0$

ولكن $u + iv = (x + iy) + \beta_1 + i\,\beta_2$

إذن

$$u = \beta_1$$
$$v = y + \beta_2$$




(شكل ٢-٥)

### ٢-٩-١-٢ التحويل التدويري Rotation

ويأخذ الصورة

$$w = e^{i\theta_o} z \quad , \quad \theta_o \in \Re$$

وبذلك تدور الأشكال في مستوى $z$ الى نظيرتها في مستوى $w$ بزاوية $\theta_o$ .. واتجاه الـــدوران يتبع زاوية $\theta_o$.

**مثال ٢-٢٦**

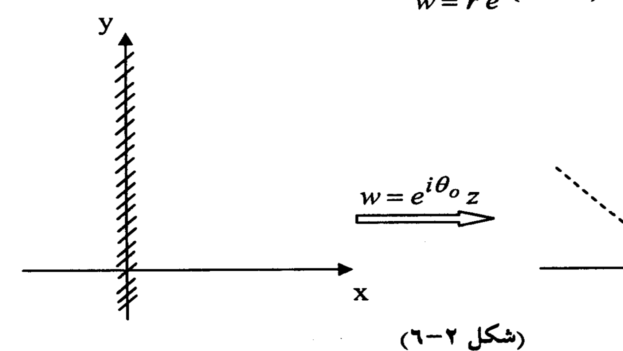
المحور التخيلي في مستوى $z$ ينتقل إلى خط مائل بزاوية $\frac{\pi}{2}+\theta_o$.

**الإثبات**

$$w = e^{i\theta_o} z$$

والآن المحور التخيلي
$$z = r\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وبالتالي
$$w = r\, e^{i\left(\theta_o+\frac{\pi}{2}\right)}$$




(شكل ٢-٦)

**٢-٩-١-٣ المــطّ Stretching**

وبأخذ الصورة $w = a z \quad , \quad a \in \Re$

أي أن
$$u = a x$$
$$v = a y$$

وكما هو واضح فإن a تمثل معامل تكبير **magnification** إذا كانت $a > 1$ ومعامـــل تصغير إذا كانت $0<a<1$

**مثال ٢-٢٧**

الدائرة $|z| = 1$ تنتقل إلى الدائرة $|w| = a$ عندما يكون $w = a\,z$ و $a > 0$.

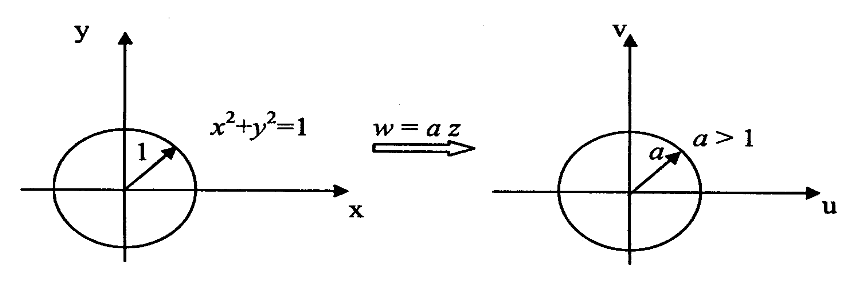
**الإثبات**

في مستوى $z$ $\qquad x^2 + y^2 = 1$

وكذلك $\qquad u = a\,x \;,\; v = a\,y$

أي أن $\qquad u^2 + v^2 = a^2(x^2+y^2) = a^2$

أي دائرة نصف قطرها a .. (شكل ٢-٧).




(شكل ٢-٧)

## ٢-٩-١-٤ العكس Inversion

وتأخذ الصورة $\qquad w = \dfrac{1}{z}$

**مثال ٢-٢٨**

الدائرة $|z| = r$ تنتقل الى دائرة $|w| = \dfrac{1}{r}$

والقرص $|z| < 1$ تنتقل إلى خارج القرص $|w| > 1$

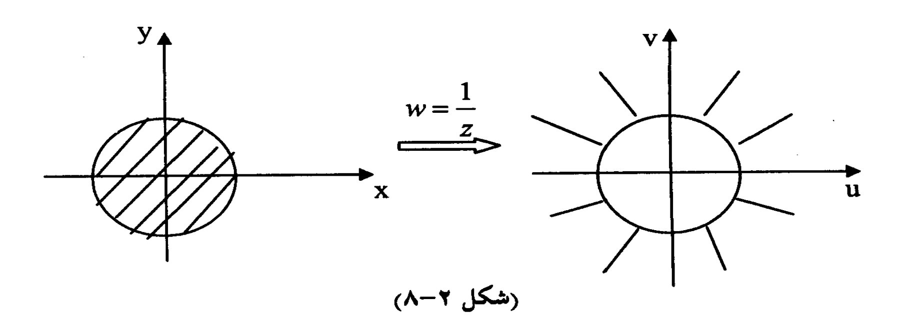
**الإثبات**

الإثبات مباشر لأن

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

فبالتالي إذا كان $|z| = r$ فإن $|w| = \frac{1}{r}$

وإذا كان $|z| < 1$ فإن $|w| > 1$ كما هو مبين بشكل (٢-٨)




(شكل ٢-٨)

وهذا يعطي معنى العكس (عكس الأشكال).

## ٢-٩-١-٥ التحويل الخطي Linear Transformation

ويأخذ الصورة $w = \alpha z + \beta$

أي أن

$$w = \alpha\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= ae^{i\theta_o}\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha = ae^{i\theta_o}$$

$$= e^{i\theta_o}\left(az + \frac{a\beta}{\alpha}\right)$$

وهذا يعني أن هذا التحويل هو مزيج من المط $(a\ z)$ وَ الانتقال $\left(az+\frac{a\beta}{\alpha}\right)$ ثم الـــدوران $e^{i\theta_o}\left(az+\frac{a\beta}{\alpha}\right)$. وهو بذلك يحافظ على الأشكال كما بيننا في الباب الأول من هـــذا الكتاب .. ويعتبر هذا إثبات أخر لهذه المسألة.

### ٢-٩-١-٦ مزدوج الخطية Bilinear Transformation

ويأخذ الصورة $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

حيث $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$

وهذا التحويل يحافظ على شكل الدوائر (بما فيها المستقيمات التي هي دوائر ذات نصف قطر لا نهائي) .. وهي أيضاً مزيج من المط والانتقال والدوران والعكس.

**مثال ٢-٢٩**

التحويل المزدوج الخطية هو مزيج من المط والانتقال والدوران والعكس.

**الإثبات**

بإعادة كتابة $w$ كالآتي:

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

حيث $\beta\gamma-\alpha\delta\neq 0$ .. وبالتالي فإن $\gamma z+\delta$ تمثل مط وانتقال وبالتالي فإن $\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma z+\delta}$ تمثل عكس ودوران وإضافة $\frac{\alpha}{\gamma}$ تمثل انتقال آخر.

**مثال ٢-٣٠**

التحويل المزدوج الخطية يحافظ على شكل الدوائرعلما بأن المعادلة العامة للدائرة في مستوى $z$ هو $Az\bar{z}+Bz+\overline{B}\bar{z}+C=0$

حيث $A, C \in \Re^{+}$ وَ $B \in C$

وفي حالة $A=0$ تصبح المعادلة معادلة خط مستقيم.

**الإثبات:**

لو أخذنا هذه المعادلة العامة للدائرة واستعملنا "العكس" $w=\dfrac{1}{z}$ أي أن $z=\dfrac{1}{w}$

فإن

$$A\frac{1}{w}.\frac{1}{\overline{w}}+B\frac{1}{w}+\overline{B}\frac{1}{\overline{w}}+C=0$$
$$A+B\overline{w}+\overline{B}w+Cw\overline{w}=0$$

وهي بشكل عام معادلة دائرة أيضاً في مستوى $w$ .. وكذلك لو استعملنا علاقة الـــدوران $w=e^{i\theta_0}z$ .. أو استعملنا علاقة الانتقال $w=z+\beta$ أو علاقـــة المـــط $w=\mathrm{a}\,z$ ..

فجميعها توصل الى معادلة دائرة فى مستوى $w$.

وبالتالي فتحويل مزدوج الخطية والذي هو مزيج من ذلك كله يحافظ على الشكل الدائري.

**مثال ٢-٣١**

أثبت أن تحويل مزدوج الخطية يحول ثلاث نقاط بعينها في مستوى $z$ (وليكن $z_1, z_2, z_3$) إلى ثلاث نقاط بعينها في مستوى $w$ (وليكن $w_1, w_2, w_3$) على الترتيب بما فيهـــا النقطة عند $\infty$.

**الإثبات:**

على ضوء المثال ٢-٢٩ فإن

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

وبالتالي فإن

$$z_1\to w_1:\quad w_1=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_1+\delta)}\qquad(1)$$

$$z_2\to w_2:\quad w_2=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_2+\delta)}\qquad(2)$$

$$z_3\to w_3:\quad w_3=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_3+\delta)}\qquad(3)$$

$$z_4\to w_4:\quad w_4=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_4+\delta)}\qquad(4)$$

وبالتالي فإن

$$w_1-w_2=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma z_1+\delta}-\frac{1}{\gamma z_2+\delta}\right)$$

$$=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_2-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)} \tag{5}$$

وبالمثل

$$w_2-w_3=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_3-z_2)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)} \tag{6}$$

ولو هناك نقطة رابعة $w_4 \to z_4$ فإن

$$w_1-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \tag{7}$$

$$w_3-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_3)}{(\gamma z_3+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \tag{8}$$

ونلاحظ الآتي:

$$\frac{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}=\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$$

$$=\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

أي أن النسبة $\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ لا تتغير تحت التحويل مزدوج الخطية وهي لذلك تسمي بالنسبة الضربية Cross ratio. وهي خاصية من خواص تحويل مزدوج الخطية.

وحيث أن التحويل به أربع مجاهيل $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ وهناك علاقة ثابتة لا يوجد فيها هذه البارامترات .. وبالتالي فمن الممكن تحويل ثلاث نقاط الى ثلاث أخرى بشكل فريد .. فباعتبار النقطة الرابعة نقطة عامة $w_4=w,\ z_4=z$ فإن

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_1-w_2)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}=\text{cross ratio}$$

وبالتالي فبحل المعادلة في $w$ نحصل على المعادلة المطلوبة.

**مثال ٢-٣٢**

أوجد مزدوج الخطية التي تنقل النقاط $z = i, 1, 0$ إلى $w = 0, -i, -1$ بالترتيب.

الحل

باستخدام النسبة الضربية فإن

$$\frac{(w-0)(-i+1)}{(w+1)(+i)} = \frac{(z-i)(1)}{(z-0)(i-1)}$$
$$w(1-i)^2 z = (w+1)(-i)(z-i)$$
$$w\left((1-i)^2 z + i(z-i)\right) = (-i)(z-i)$$
$$w(-2iz + iz + 1) = -i(z-i)$$

$$\boxed{w = \frac{-iz-1}{-iz+1}}$$

**مثال ٢-٣٣**

اثبت أن التحويل $w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-z_o}{z-\overline{z}_o}\right)$ يحول نصف المستوى العلوي في مستوى $z$ إلى القرص الدائري $|w|<1$ بحيث يتحول المحور الأفقي إلى الدائرة $|w|=1$. حيث $z_0$ أي نقطة معلومة في نصف المستوى العلوي في مستوى $z$.

**الإثبات:**

بما أن
$$w = e^{i\theta}\frac{(z-z_o)}{(z-\overline{z}_o)}$$

فإن
$$|w| = \left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-z_o|}{|z-\overline{z}_o|}$$

ولكن $|e^{i\theta}| = 1$ .. بالتالي

$$|w| = \frac{|z-z_o|}{|z-\overline{z}_o|}$$

وبوقوع $z_0$ في النصف العلوي من مستوى $z$ .. فإن $\bar{z}$ تكون في النصف الأسفل وبالتالي فإن $|z-\bar{z}_0|<|z-z_0|$ ويحدث التساوي عندما تقع $z_0$ على المحور الحقيقي (وبالتالي $\bar{z}_0$ أيضاً) .. وبذلك يثبت المطلوب.

**مثال ٢-٣٤**

أثبت أن التحويل $|\alpha|<1, w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$

يحول (i) $|z|=1$ إلى $|w|=1$

(ii) القرص $|z|<1$ إلى القرص $|w|<1$

**الإثبات:**

(i) بوضع $z=e^{i\psi}$ وَ $b<1$ , $\alpha=be^{i\lambda}$

بالتالي

$$|w|=\left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-\alpha|}{|\bar{\alpha}z-1|}$$

$$=\frac{\left|e^{i\psi}-be^{i\lambda}\right|}{\left|be^{-i\lambda}e^{i\psi}-1\right|}$$

أي أن

$$|w|^2=\frac{(\cos\psi-b\cos\lambda)^2+(\sin\psi-b\sin\lambda)^2}{(b\cos(\psi-\lambda)-1)^2+b^2\sin^2(\psi-\lambda)}$$

$$=\frac{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}$$

$$=1$$

إذن $|w|=1$

(ii) بوضع $r<1$ , $z=r\,e^{i\psi}$ فإن

$$|w|^2 = \frac{r^2 + b^2 - 2rb\cos(\psi - \lambda)}{r^2b^2 + 1 - 2rb\cos(\psi - \lambda)} = \frac{A}{B}$$

والآن

$$B\text{-}A = r^2b^2 + 1 - r^2 - b^2$$
$$= (1\text{-}r^2)(1\text{-}b^2) \quad , \quad r < 1 \quad , \quad b < 1 > 0$$

أي أن $B > A$

وبالتالي فإن $|w|^2 < 1 \Rightarrow |w| < 1$

## ٢-٩-١-٧ النقاط الثابتة Fixed Points

النقاط التي تحافظ على العلاقة $w = z$ تسمى بالنقاط الثابتة للتحويل Fixed Points of Transformation

**مثال ٢-٣٥**

أوجد النقاط الثابتة للتحويل $w = \dfrac{2z-5}{z+4}$

**الحل**

بوضع $w = z$ فإن

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

أي أن $z^2+4z=2z-5$

أي أن $z^2+2z+5=0$

وهذه المعادلة تعطي النقطتان

$$z_1 = -1 + 2i$$
$$z_2 = -1 - 2i$$

---

**تمرينات – ٢**

(١) أثبت أن اشتقاق الدوال الأولية كم هو مبين في جدول ٢-١ ص ٥٤.

(٢) أثبت أن الدالة $f(z) = |z|^2$ دالة غير تحليلية في أي مكان.

(٣) أثبت أن الدالة $w = f(\bar{z})$ دالة غير تحليلية في أي مكان.

(٤) أثبت أن $u = 2x(1\text{-}y)$ دالة توافقية ثم أوجد مرافقتها والدالة $f(z)$ واشتقاقها $\bar{f}(z)$

(الإجابة $f(z) = iz^2 + 2z$)

(٥) إذا كانت $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ فأوجد $\bar{f}(z)$ حيث $f(z) = u + iv$.

(٦) تأكد من أن الدوال الآتية تحليلية في كل مكان

(i) $f(z) = e^{z^2}$

(ii) $\cos z^2$

(٧) بدل الدالة $u$ بأحد الدوال الآتية وأعد المطلوبات في المسألة (٤)

(i) $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

(ii) $u = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

(iii) $u = x\, e^x \cos y - y\, e^x \sin y$

(٨) إذا كانت $v = -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2)$ أوجد مرافقتها والدوال $f(z)$ وَ $\bar{f}(z)$.

(٩) أثبت أن $\dfrac{d}{dz}\left(e^z \sin z\right) = e^z (\cos z + \sin z)$

باستخدام $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$

(١٠) أثبت أن $\dfrac{d}{dz} \ln f(z) = \dfrac{\bar{f}(z)}{f(z)}$

(١١) أوجد قيمة a التي تجعل $w = \dfrac{az - 1}{z - i}$ تحول دائرة الوحدة $|z| = 1$ الى الدائرة $|w| = R$.

(الإجابة: $R = 1$ وَ $a = -i$)

(١٢) أوجد تحويل مزدوج الخطية الذي يحول النقاط $(-i, 0, i)$ الى $(-1, i, 1)$

(الإجابة: $w = \dfrac{z - 1}{i(z + 1)}$)

(١٣) أوجد التحويل $w = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ التي تحول $z = i$ إلى $w = 0$ وكذلك $z = \infty$ إلى $w = -1$ . (الإجابة: $w = \dfrac{i - z}{i + z}$)

(١٤) أثبت أن $z = \dfrac{2a}{\pi}\ln\dfrac{1+w}{1-w}$ تحول الشريحة الأفقية المحصورة بين $y = a$ و $y = -a$ إلى داخل دائرة الوحدة $|w| = 1$.

(١٥) أثبت أن $w = z + \dfrac{1}{z}$ يحول

(i) الخط $\arg z = a$ حيث $|a| < \dfrac{\pi}{2}$ إلى قطع زائد في مستوى $w$.

(ii) $|z| > 1$ , $y > 0$ إلى المنطقة $v > 0$.

(١٦) اثبت أن $w = \cosh z$ دالة تحليلية ومن ثم أوجد صورة المستطيل المحدود بـ $x = 0, a$ و $y = 0, b$.

(١٧) أوجد مشتقات الدوال الآتية:

(i) $f(z) = \left(\sin^{-1}(2z-1)\right)^2$　　(ii), $f(z) = \ln\left(z - \dfrac{3}{2} + \sqrt{z^2 - 3z + 2i}\right)$

الإجابة (i) $2\sin^{-1}(2z-1)/\sqrt{z - z^2}$　　(ii), $\dfrac{1}{\sqrt{z^2 - 3z + 2i}}$

(١٨) أوجد المشتقة الثانية للدوال:

(i) $f(z) = \sinh (z+1)^2$

(ii) $f(z) = (z)^{z+i}$

(١٩) أوجد النقاط الشاذة للدوال

(i) $\dfrac{\ln(z+3i)}{z^2}$　　$(z = 0, z = -3i)$

(ii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{z}$　　$(z = 0)$

(iii) $\sqrt{z(z^2+1)}$　　$(z = 0, \pm i)$

(٢٠) إذا كانت $f(z) = u + iv$ فاثبت أن

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) + C \qquad \text{(i)}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) \qquad \text{(ii)}$$

(٢١) أوجد الدالة التحليلية $f(z)$ والتي تحقق أن $\text{Re}(\bar{f}(z)) = 3x^2 - 4y - 3y^2$

وَ $f(1+i) = 0$ الإجابة$(f(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i)$

(٢٢) إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية في الصورة القطبية $(r, \theta)$ فأثبت أن

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$$

(٢٣) إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فأثبت أن:

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

دالة تحليلية أيضاً.

(٢٤) أوجد معادلتي كوشي-ريمان لنظام المحاور $(\rho, \eta)$

حيث $x = e^{\rho}\cosh\eta \quad , \quad y = e^{\rho}\sinh\eta$

(٢٥) إذا كانت معادلة الشحنة في دائرة كهربية خطية مكونة من مصدر للجهد الكهربي $E_o\cos wt$ ومقاومة $R$ ومكثف $C$ وممانعة $L$ هي

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_o\cos wt$$

أثبت أن حل هذه المعادلة هو

$$Q = \text{Re}\left\{\frac{E_o e^{iwt}}{iw\left(R + i\left(wL - \frac{1}{wC}\right)\right)}\right\}$$

**مساعدة:** يمكنك إعادة كتابة الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $E_o\, e^{iwt}$ وأفترض أن الحل في صورة $Ae^{iwt}$ ثم أوجد A.

# الباب الثالث

## تكامل الدوال المركبة
## Complex Integration

في هذا الباب نكتشف سحراً جديداً في نظرية المتغير المركب .. وإذا كنا قد تمتعنا بمعادلتي كوشي – ريمان ونظريات أخرى كوجود جديد لمفاهيم الاشتقاق للدوال بعد توسيع مفهومها من الحقيقي إلى المركب .. فإن سحر النظرية الحقيقي يكمن في التكامل ..

### ٣-١ التكامل الخطي Line Integrals

مازالت الاستمرارية تلعب دوراً محورياً .. فإذا ما كانت $f(z)$ دالة مستمرة على كل نقاط المنحنى C (شكل ٣-١) والذي سنفترض أن له طولاً محدوداً وليكن L ولتكن نقطة بدايته $a = z_0$ ونقطة نهايته $b = z_n$ بينما النقاط $z_1, \ldots, z_{n-1}$ نقاط اختيارية على هذا المنحنى .. وإذا ما كوننا التجميع

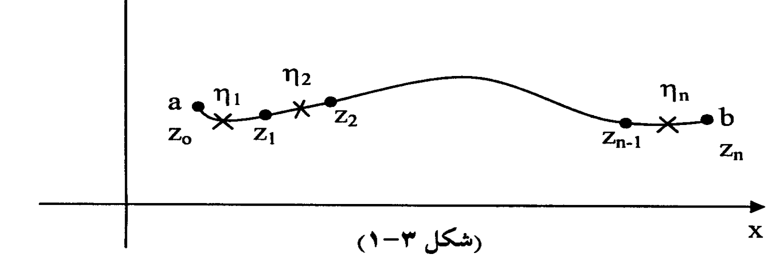
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k$$

حيث $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

وبجعل عدد التقسيمات $n \to \infty$ بحيث $|\Delta z_k| \to 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

يعطى تعريفاً للتكامل الخطي للدوال المركبة Complex Line Integral




(شكل ٣-١)

ومازال شرطنا هو الاتصال .. وبالتالي فإذا ما كانت الدالة دالة تحليلية فهو شرط أكبر من المطلوب.

والآن إذا ما كانت $f(z)= u + iv$ فإن

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C vdx + udy$$

أي أن التكامل المركب ينقسم إلى تكاملين خطيين معرفين على الدوال الحقيقية .. ومن هنا تدخل بعض النظريات المفيدة في التكامل الخطي الحقيقي لصياغة نظريات جديدة للتكامل الخطي المركب .. وبناءً على الخواص ذاتها في الحقل الحقيقي فإنه يمكن كتابة الخواص التالية للتكامل الخطي المركب:

$$\int_C (f(z) \pm g(z))dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz \qquad \text{(i)}$$

$$\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z), A: \text{ثابت} \qquad \text{(ii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz \qquad \text{(iii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz \qquad \text{(iv)}$$

حيث m نقطة على C أيضاً.

(v) وهي خاصية هامة

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$$

حيث $|f(z)| \le M$ .. أي أن M أحد الحدود القصوى لـ f(z) على C و L هو طول المنحنى C.

الإثبات:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |f(\eta_k)||\Delta z_k| \quad , \qquad |f(z)| \le M$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} M\ |\Delta z_k|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta z_k|$$

$$= M\ L$$

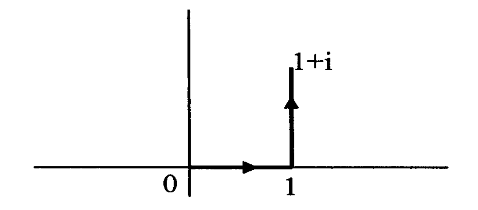
وهذا الأسلوب لحساب القيمة العددية سوف نستعمله كثيرا في هذا الباب وفي مواضع مختلفة فيجب على القارئ فهمه فهماً جيداً .. وكنتيجة لذلك فإن علاقة ذات أهمية كبيرة يجب الالتفات إليها كالتالي:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$$

**مثال ٣-١**

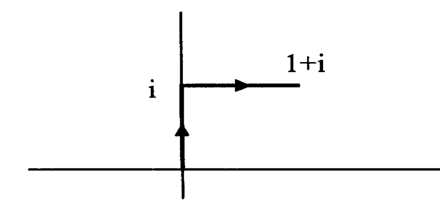
أحسب $\int_0^{1+i} z\ dz$ على

(i) المسار من z=0 إلى z=1 ثم المسار من z=1 إلى z=1+i (شكل ٣-٢)



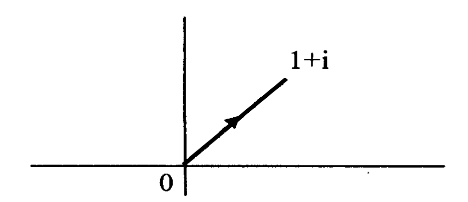

(شكل ٣-٢)

(ii) المسار من $z=0$ إلى $z=i$ ثم المسار من $z=i$ إلى $z=1+i$ (شكل ٣-٣)




(شكل ٣-٣)

(iii) المسار المباشر من $z=0$ إلى $z=1+i$ كما هو مبين بشكل ٣-٤.




(شكل ٣-٤)

الحل

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^1 \underbrace{zdz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{zdz}_{x=1}$$

$$= \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+iy)idy \quad , \quad 0 \le y \le 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \,{}_0|^1 + iy\,{}_0|^1 - \frac{1}{2}y^2\,{}_0|^1$$

$$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2}$$

$$= i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثاني

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^i \underbrace{zdz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=1}$$

$$= \int_0^1 iy(idy) + \int_0^1 (x+i)(dx)$$

$$0 \le y \le 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= -\frac{1}{2}y^2\,{}_0|^1 + \frac{1}{2}x^2\,{}_0|^1 + ix\,{}_0|^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i$$

$$= i$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث (y=x)

$$\int_0^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=x} = \int_0^1 (x+ix)(dx+idx) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= \int_0^1 (x)(1+i)(1+i)dx$$

$$= (1+i)^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1+2i-1)$$

$$= i$$

هل هي مجرد مصادفة أن قيم التكامل متساوية على هذه المسارات المتعددة؟

**مثال ٣-٢**

أحسب $\int_0^{1+i} \bar{z}dz$ على نفس المسارات السابقة

**الحل**

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-iy)(idy)$$

$$= \frac{1}{2} + i(1) + \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثاني

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=1}$$

$$= \int_0^1 (-iy)(idy) + \int_0^1 (x-i)dx$$

$$= \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - ix \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i$$
$$= 1 - i \quad ?$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=x}$$
$$= \int_0^1 (x - ix)(dx + idx)$$
$$= \int_0^1 x(1-i)(1+i)dx$$
$$= 2\int_0^1 xdx$$
$$= 2\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$
$$= 1??$$

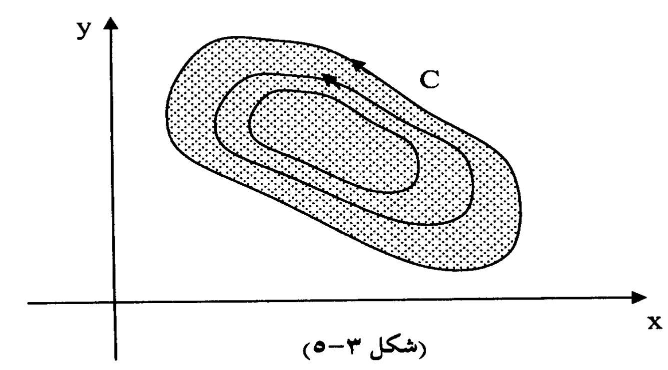
التكامل غير فريد ويعتمد على المسار .. لماذا ؟؟

لابد أن المثالين السابقين يثيران الاهتمام بشكل كبير .. فبعض الدوال تكاملاتها لا تعتمد على المسار بينما يعتمد الآخر على مسار التكامل .. فهل نستطيع ســبر أغوار هذه المسألة ؟! .. في الواقع نستطيع.

**تعريف: المنطقة يسيرة التوصيل والمنطقة عديدة التوصيل**

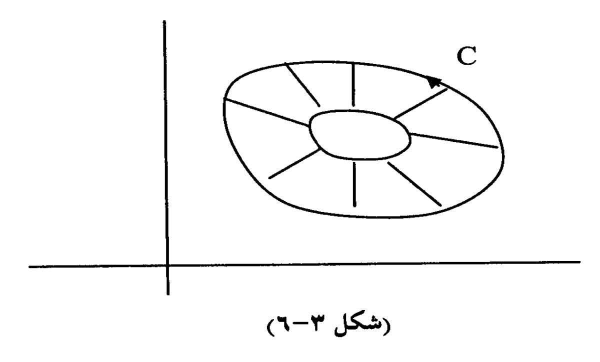
**Simply-Connected and Multiply-Connected Regions**

يطلق على منطقة أنها يسيرة التوصيل Simply-Connected إذا كان أي منحنى مغلق يسير Simple closed curve داخل المنطقة يمكن تقليصه إلى نقطة بدون مغادرة المنطقة ذاتها (شكل ٣-٥)




(شكل ٣-٥)

وإذا لم يكن من الممكن إجراء ذلـــك فالمنطقـــة تـــسمى بعديـــدة الاتـــصال multiply connected .. وعادةً ما يوجد فجوات داخل هذه المناطق (شكل ٣-٦)




(شكل ٣-٦)

وبالطبع وجود فجوة واحدة على الأقل لا تمكننا من تقليص أي منحنى مغلق يسير داخل هذه المناطق إلى نقطة إلا إذا غادرنا المنطقة إلى الفجوة وهي تحتوي نقاط ليست من المنطقة ذاتها. وسوف لا نهتم بتعقيدات الأشكال في هذه النقطة .. فالمنحنيات التي ستعتمدها دائما يـــسيرة والمناطق التي تحيط بها إما يسيرة أو متعددة.

وإذا كان المسار على المنحنى المغلق اليسير في عكس اتجاه عقارب الساعة counter clock wise فإن هذا الاتجاه يعتبر موجباً والعكس يعتبر اتجاهاً سالباً .. والتكامل على أمثال هذه المنحنيات يسمى بالتكامل المساري Contour integral.

## ٣-٢ نظرية كوشي Cauchy's Theorem

### نظرية ٣-١

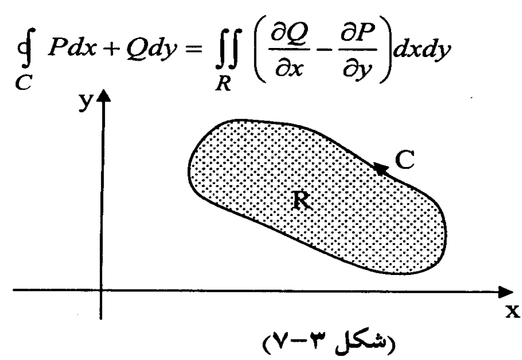
إذا كانت f(z) دالة تحليلية في منطقة R وعلى حدودها المنحنى المغلق C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

### الإثبات

يجب التمهيد أولاً إلى نظرية شهيرة في المتغير الحقيقي وتسمى بنظرية جرين Green's Theorem في المستوى وتنص على أنه إذا كانت P(x, y) وَ Q(x, y) دوال متصلة ولها تفاضلات جزئية متصلة في منطقة R وعلى حدودها C (أنظر شكل ٣-٧) فإن

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$




(شكل ٣-٧)

فالتكامل الخطي يتحول إلى تكامل على مساحة – نرجو الانتباه لذلك.

وبالنسبة للنظرية فبما أن f(z)=u+iv دالة تحليلية فإن $u$ وَ $v$ تكون متصلة طبعاً وكذلك مشتقاتها الجزئية داخل المنطقة R وعلى حدود المنطقة المنحنى C مع ملاحظة أن

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$
$$= (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

فإن
$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

وبتطبيق نظرية جرين على كل من التكاملين فإن

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي – ريمان .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وباستخدام هاتين المعادلتين فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

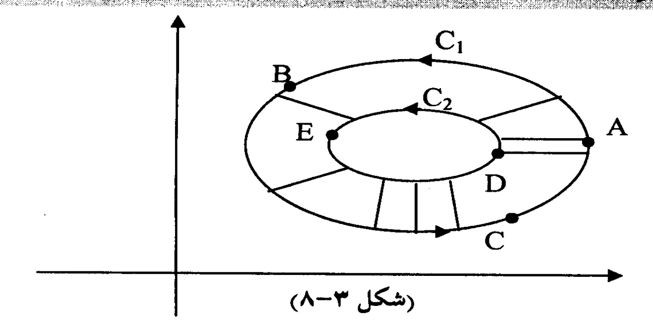
**ملاحظات:**

(i) طالمَا أن $f(z)$ دالة تحليلية على المنحنى المغلق C اليسير وداخله **inside and on** فإن التكامل يساوي صفر بغض النظر عما يحدث للدالة من نقاط شاذة تسبب عدم التحليلية لها خارج هذا النطاق .. فمثلاً

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z}dz = 0$$

لأن الدائرة $|z-2| = 1$ لا تحتوي على النقطة الشاذة $z=0$ .

(ii) يمكن تطبيق هذه النظرية على المناطق المتعددة الاتصال وذلك بعمل قطع (أو عدة قطوع) بين الفجوات التي تحتويها هذه المنطقة .. فمثلا بالنسبة للمنطقة الموضحة بشكل ٣-٨




(شكل ٣-٨)

فهي محدودة بالمنحنى $C_1$ من الخارج والمنحنى $C_2$ من الداخل وهي بذلك منطقة متعددة الاتصال فإذا ما جئنا عند نقطتي D, A وتصورنا وجود قطع من A إلى D وأكملنا المسار من A إلى B إلى C إلى A ثم إلى D ثم إلى E (بعكس اتجاه المنحنى) ثم إلى D ثم إلى A مرة أخرى فإننا بذلك نحصل على منطقة يسيرة الاتصال (لأننا تجنبنا وجود الفجوة) وبذلك يمكن تطبيق نظرية كوشي فيكون

$$\oint_{ABCADEDA} f(z)dz = 0$$

ثم بتقسيم المسار مرة أخري فأننا نحصل على

$$\underbrace{\int_{ABCA} f(z)dz}_{(\text{في اتجاه } C_1)} + \int_{A}^{D} f(z)dz + \underbrace{\int_{DED} f(z)dz}_{(\text{بعكس اتجاه } C_2)} + \int_{D}^{A} f(z)dz = 0$$

والتكامل الثاني والرابع متساويان عددياً ويتضادان في الإشارة ..فبالتالي

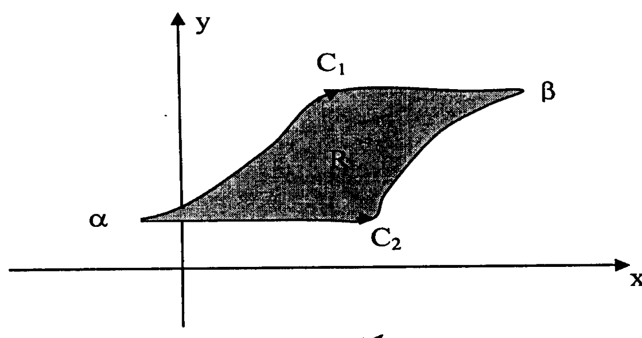
$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

أي أن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

وهي نتيجة هامة جداً لنظرية كوشي.

(iii) والآن نأتي إلى نتيجة هامة جداً جداً من نتائج نظرية كوشي .. فإذا أخذنا المسار المبين بشكل (٣-٩)




**(شكل ٣-٩)**

والمطلوب إيجاد التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ على المسار $C_1$ أو المسار $C_2$ وكانت $f(z)$ دالة تحليلية على كل من $C_1$ و $C_2$ وداخل النقاط في R المحدود بهما .. فإن

حيث $C$ يحد المنطقة R ، $\oint_C f(z)dz = 0$

$$\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

أي أن $$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

أي أن التكامل للدوال التحليلية في منطقة R لا يعتمد على المسار بين النقطتين في R .. وعلى ذلك فالدوال المعروفة إنها تحليلية في كل مكان يمكن تكاملها مباشرة بغض النظر عن المسار بين حدود التكامل. كذلك بالنسبة للدوال المعروفة إنها تحليلية في منطقة R فإن التكامل بين أي نقطتين في R لا يعتمد على المسار بين النقطتين .. وبذلك نجد أن التحليلية مرة أخرى هي الكلمة السحرية التي تيسر الأمور.

**(iv) نظرية موريرا Morera's Theorem**

إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة في R المنطقة اليسيرة التوصيل وأن $\oint_C f(z)dz = 0$

على أي منحنى مغلق يسير في R .. فأن $f(z)$ دالة تحليلية في R.

وهذا المنطوق هو عكس منطوق نظرية كوشي .. والإثبات يسير بشكل عكسي مع تغيير طفيف.

## ٣-٣ التكامل غير المحدود Indefinite Integrals

دعونا نتقدم خطوة كبيرة في اتجاه حساب بعض تكاملات الدوال المركبة .. خاصةً عندما تكون هذه الدوال تحليلية.

**نظرية ٣-٢**

دع $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة يسيرة الاتصال R ودع a وَ z نقطتان في هذه المنطقة فإن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du \qquad \text{(a)}$$

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{(b)}$$

**الإثبات**

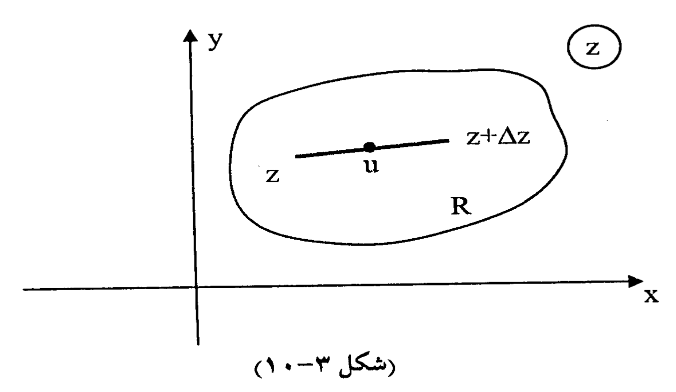
دعنا نكون المقدار

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_a^{z+\Delta z} f(u)du - \int_a^{z} f(u)du\right] - f(z)$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(u)du - f(z) \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left(f(u) - f(z)\right)du \qquad \text{(لماذا؟)} \quad (1)$$

ولكن الدالة $(f(u) - f(z))$ دالة تحليلية في R وبالتالي فتكاملها غير معتمد على المسار بين z وَ $z+\Delta z$ طالما كانتا النقطتان في R .. فإذا أخذنا المسار الخطى المباشـــر بـــين z وَ $z+\Delta z$ (أنظر شكل ٣-١٠).




(شكل ٣-١٠)

وطبقا لاستمرار الدالة $f(z)$ في R فإن $|f(u)-f(z)|<\in$ طالمـــا $|u-z|<\delta$ أي $|\Delta z|<\delta$ .. وبالتالي

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(u)-f(z))du\right|<\in|\Delta z| \tag{2}$$

أي أن من (1) وَ (2):

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(u)-f(z))du\right|<\in$$

أي أن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

أي أن $F(z)$ على صورتها $\int_a^z f(u)du$ دالة تحليلية ويكون $F`(z) = f(z)$.

هذه النظرية تعني أن التكامل $\int f(z)dz$ سيكون مساوياً لـ $F(z)+C$ .. لأن $(F(z)+C)` = f(z)$ حسب منطوق النظرية السابقة .. وهذه النتيجة بالنسبة إلينا عادية لأنه سبق استعمالها في الدوال الحقيقية ..

أي أن

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

وعلى هذا الأساس فجدول التفاضلات الموجود ص ٥٤ يمكن عكسه للحصول على جدول آخر للتكاملات .. أنظر جدول ٣-١.

ودعونا الآن نلخص الحقائق التي حصلنا عليها حتى الآن:

(i) إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R وكان النقطتان z, a في R فإن $\int_a^z f(z)dz$ يكون مستقلا عن المسار بين النقطتين z, a.

(ii) أيضا فإن $F(z) = \int_a^z f(z)dz$ تكون دالة تحليلية أيضا في R ويكون $F`(z) = f(z)$

(iii) ويكون أيضا $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$ وذلك لأن

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)_a|^b = F(b) - F(a)$$

ولننتبه لذلك جيداً .. إننا يمكننا التكامل بشكل مباشر الآن وبكافة الطرق التي تعودنا عليها وباستخدام الجدول ٣-١ فقط إذا تحقق الشرط السحري وهو أن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R تحتوي حدود ومسار التكامل..

**مثال ٣-٣**

$$\int_0^{1+i} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{2}(1+i)^2$$
$$= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$$

لأن الدالة $f(z) = z$ دالة تحليلية في كل مكان.

وفي الواقع فإن الوصول إلى هذه النتيجة أمر مدهش ومهم .. لأننا الآن يمكننا إجراء تكاملات كثيرة وعديدة واستخدام بنك معلوماتنا السابقة من طرق التكامل لتكامل الدوال المركبة والتي هي تحليلية.

(iv) لا ننسى أبداً النظرية الأم .. نظرية كوشي والتي تقول أن

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

طالما كانت $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة اليسيرة الاتصال (وحتى المتعددة الاتصال بتصرف خاص كما بيننا) والمحاطة بالمنحنى المغلق اليسير C.

**مثال ٣-٤**

$$\oint_{|z|=3} z\, dz = 0$$

بدون عناء في الإثبات لأن الدالة $f(z) = z$ دالة تحليلية في كل مكان .. وليس داخل وعلى الدائرة $|z| = 3$ فقط.

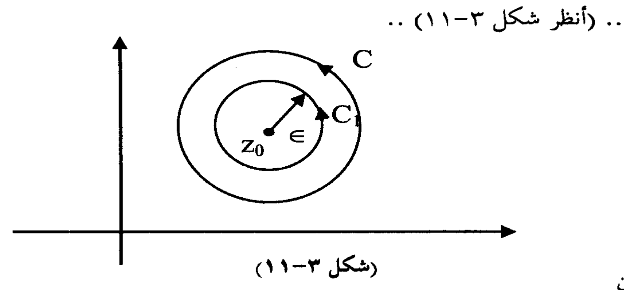
ويبدو أن معركتنا الحقيقية ستكون مع هذه الدوال التي تحتوي نقاط شاذة في المنطقة R .. كيف يمكن حساب التكامل لأمثال هذه الدوال (الدوال غير التحليلية عند نقاط شاذة محدودة)...

1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{dz}{z} = \ln z$
3. $\int e^z dz = e^z$
4. $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$
5. $\int \sin z dz = -\cos z$
6. $\int \cos z dz = \sin z$
7. $\int \tan z dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$
8. $\int \cot z dz = \ln \sin z$
9. $\int \sec z dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$
10. $\int \csc z dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$
11. $\int \sec^2 z dz = \tan z$
12. $\int \csc^2 z dz = -\cot z$
13. $\int \sec z \tan z dz = \sec z$
14. $\int \csc z \cot z dz = -\csc z$
15. $\int \sinh z dz = \cosh z$
16. $\int \cosh z dz = \sinh z$
17. $\int \tanh z dz = \ln \cosh z$
18. $\int \coth z dz = \ln \sinh z$
19. $\int \sec h\, z dz = \tan^{-1}(\sinh z)$
20. $\int \csc h\, z dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$
21. $\int \sec h^2 z dz = \tanh z$
22. $\int \csc h^2 z dz = -\coth z$
23. $\int \sec h\, z \tanh z dz = -\sec h\, z$
24. $\int \csc hz \coth z dz = -\csc hz$
25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$
26. $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} \text{ or } -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$
27. $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$
28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\frac{z}{a} \text{ or } -\cos^{-1}\frac{z}{a}$
29. $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$
30. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z} \text{ or } \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{z}{a}$
31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$
32. $\int \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$
33. $\int e^{az}\sin bz dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$
34. $\int e^{az}\cos bz dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2 + b^2}$

(v) ولا ننسى أيضا النتيجة الهامة للنظرية الأم وهي أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة محدودة بمنحنيين مغلقين يسيرين $C_1$, $C_2$ وعلى المنحنيين أيضا .. فإن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

ونرجو أن ننتبه أيضا إلى هذه النتيجة المدهشة .. فهي تعطي حلاً لمسألة تواجد النقـــاط الشاذة في المنطقة R إذ يمكننا عزل هذه النقطة الشـــاذة بدائرة تكون نصف قطرهـــا $\in$ ومركزها هو النقطة الشـــاذة نفسها أي أن $|z-z_0|=\in$ حيث $z=z_0$ هي النقطة الشاذة فإذا ما حدث ذلك فإننا يمكننا استخدام النتيجة السابقة لإجراء التكامل على الدائرة ذاتها .. (أنظر شكل ٣-١١) ..




(شكل ٣-١١)

أي أن

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=\in} f(z)dz$$

في الواقع هذه النتيجة تعطينا نقطة الانطلاق في حساب أمثال هذه التكاملات ..

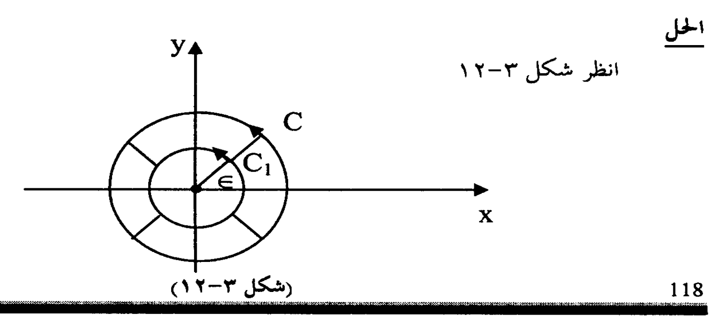
**مثال ٣-٥**

$$\oint_{C} \frac{dz}{z}$$

حيث $C$ منحنى مغلق يسير يحتوي النقطة $z = 0$

**الحل**

انظر شكل ٣-١٢




(شكل ٣-١٢)

وبالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=\in} \frac{dz}{z}$$

لاحظ أن كل النقاط الواقعة على الدائرة $\in = |z|$ تكتب بصورة

$z = \in e^{i\theta}\ , 0 \leq \theta < 2\pi$ وبالتالي فإن $dz = \in i\, e^{i\theta}\, d\theta$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=C} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in i e^{i\theta} d\theta}{\in e^{i\theta}}$$

$$= i \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

وهي قيمة تخيلية لتكامل لا نستطيع إجراءه بالطرق العادية لأن $f(z)$ في هذه الحالة دالة غير تحليلية في R .. فلا يمكننا أن نحسب التكامل على أنه $\ln\ z+C$ .. هذا خطأ فادح .. وهنا يظهر التأثير الكبير لكون الدالة مركبة أولاً وثانياً أن لها نقاط شاذة في المنطقة R المحدودة بـ C.

ويمكن توسيع استعمال هذه النتيجة الجميلة في حالة وجود أكثر من نقطة شاذة .. وذلك باستخدام أساليب جبرية مثل الكسور الجزئية كما يوضح المثال التالي.

**مثال ٣-٦**

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)}$$

حيث $C$ يحتوى النقاط الشاذة $z = 0$ وَ $z = 1$

**الحل**

يمكن استخدام الكسور الجزئية ليكون $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$

حيث $A = -1$ وَ $B = 1$ (يمكن الرجوع لأي كتاب جبر في المرحلة الجامعية)

أي أن
$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z-1}$$

وبالتالي فكل تكامل الآن مشكلته هو وجود نقطة شاذة واحدة فقط يمكن عزلها والتعامل معها كما سبق في مثال ٣-٥ (أنظر شكل ٣-١٣)

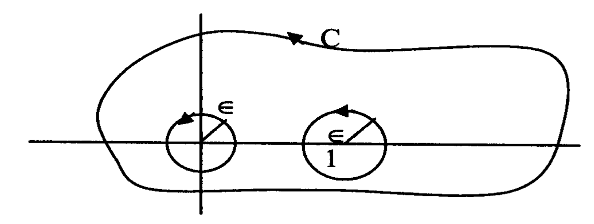
$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{\substack{|z|=\in \\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)} = \oint_{\substack{|z-1|=\in \\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

وبالتالي فإن التكامل

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -2\pi i + 2\pi i$$
$$= 0$$

وهذا ليس معناه أن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ دالة تحليلية باستخدام نظرية موريرا لأن شرط أن f(z) دالة متصلة في R غير متواجد .. نرجو الانتباه لذلك .. فمن الممكن للتكامل أن يساوي صفر بغض النظر عن تطبيق نظرية كوشي .. فالتكامل يمكنه أخذ أي قيمة في C.

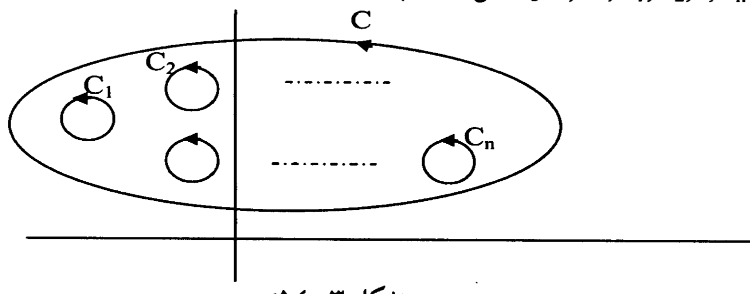



(شكل ٣-١٣)

بذلك نكون قد مهدنا للنظرية العامة التالية:

## ٣-٤ تكامل دالة غير تحليلية عند عدد محدود من النقاط الشاذة

**نظرية ٣-٣** دع $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R محدودة بالمنحنيات المغلقة اليسيرة $C, C_1, C_2, .., C_n$ (أنظر شكل ٣-١٤).




**(شكل ٣-١٤)**

فإن

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz$$

**الإثبات:** بتعميم القطوع Cuts التي سبق واستعملناها في إثبات النتيجة المحدودة بوجود نقطة شاذة واحدة (انظر ص ١١٠) وبذلك نحصل على

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz \ldots - \oint_{C_n} f(z)dz = 0$$

وبالتالي يثبت منطوق النظرية.

**ملاحظة:** هذه النظرية تعمم ما سبق قوله في (v) ص ١١٨ .. وبالتالي مع استعمال واسع لنظرية الكسور الجزئية يمكننا تطبيق هذه النظرية بنجاح ولكن على النقاط الشاذة الداخلية فقط .. وإهمال النقاط التي هي خارج R.

**مثال ٣-٧**

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)}$$

حيث

(i) C تحتوي كل النقاط الشاذة للدالة.

(ii)   C تحتوي z = 1 وَ z = -1 فقط.

(iii)   C تحتوي z = 0 وَ z = 1 فقط.

<u>الحل</u>

أولا باستخدام الكسور الجزئية فإن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{1}{z(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}$$

وبالطرق المعتادة فإن $C=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, A=-1$

أي أن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{-1}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

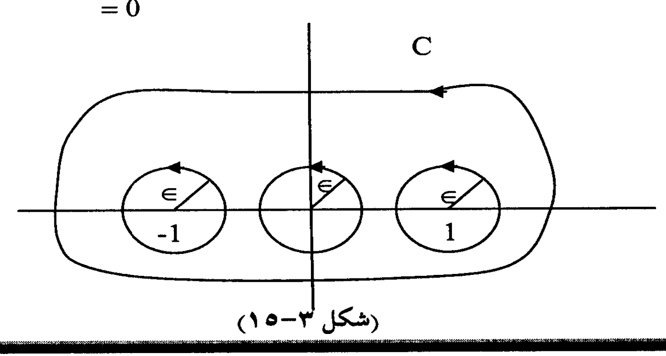
(i)   وبالتالي طبقاً للنظرية ٣-٣ فإن (أنظر شكل ٣-١٥)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)}=-\oint_C \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$=-\oint_{\substack{|z|=\in \\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z-1|=\in \\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z+1|=\in \\ z+1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z+1}$$

$$=-2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i$$

$$=0$$




(شكل ٣-١٥)

(ii) أنظر شكل ٣-١٦

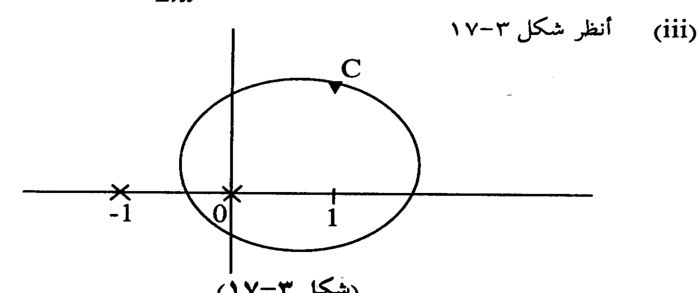
(شكل ٣-١٦)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}$$

$$= 0\ (\text{لماذا؟}) + \frac{1}{2}(2\pi i) + \frac{1}{2}(2\pi i)$$

$$= 2\pi i$$

(iii) أنظر شكل ٣-١٧




(شكل ٣-١٧)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$= -2\pi i + \frac{1}{2}(2\pi i) + 0\ (\text{لماذا؟})$$

$$= -\pi i$$

**ملاحظة:** أليس وجود الثابت $(2\pi i)$ لافتاً للنظر ؟!

## ٣-٥ أمثلة محلولة (١) :Solved Examples

**مثال ٣-٨**

أحسب التكامل $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n=1,2,3,...$ حيث $z=a$ نقطة داخل المنطقة المحدودة بـــ C.

**الحل:**

في حالة $n=1$

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = \oint\limits_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} d\theta$$
$$= 2\pi i$$

والآن في حالة $n \geq 2$

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{(z-a)^n}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\in^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta, n \geq 2$$
$$= \frac{i}{\in^{n-1}} \left. \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{i}{\in^{n-1}\, i(1-n)} \left[ e^{i(1-n)2\pi} - 1 \right]$$

ولكن $n \geq 2$ فإن $e^{i(1-n)2\pi}=1$ وبالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad , \qquad n \geq 2$$

أي أن

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

ونلاحظ عدم اعتماد التكامل على قيمة النقطة الشاذة الداخلية $z = a$ .

**مثال ٣-٩**

احسب
$$\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z \, dz$$

**الحل**

حيث أن دالة التكامل $f(z) = z \cos z$ دالة تحليلية في كل مكان فقطعاً هناك دائما منطقة تحتوى حدود ومسار التكامل .. وبالتالي فالتكامل لا يعتمد على المسار بين النقطتين $z = 1$ وَ $z = 1+i$ والتالي

$$\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z dz = \int_{1}^{1+i} z d(\sin z)$$

$$= z \sin z \Big|_1^{1+i} - \int_1^{1+i} \sin z dz$$

$$= (1+i)\cos(1+i) - \sin 1 + \cos z \Big|_1^{1+i}$$

$$= (2+i)\cos(1+i) - \sin(1) - \cos(1)$$

**ملاحظة:**

يمكن للقارئ اختبار النتيجة بأخذ أي مسار بين النقطتين $z = 1$ وَ $z = 1+i$ .. ومقارنة النتيجة ..كذلك لاحظ أننا استعملنا التكامل بالتجزيء By parts .. وهذا ممكن .. وكذلك كل طرق التكامل المتعارف عليها في هذا الباب طالما أن f(z) دالة تحليلية.

**مثال ٣-١٠**

احسب التكامل $\int_C \frac{dz}{z^2+a^2}$ في الحالات التالية:

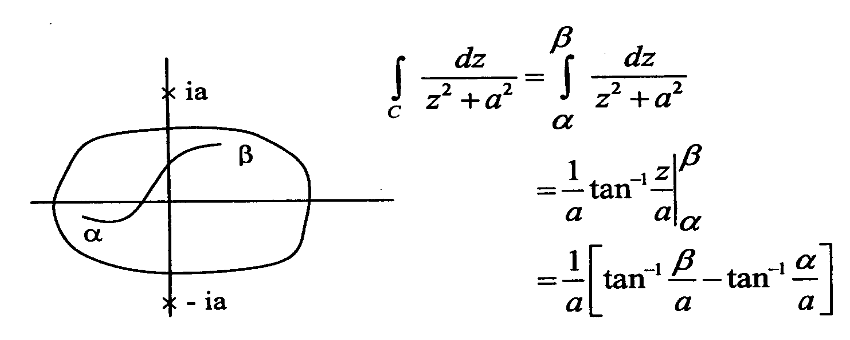
(i) في حالة C موجود في منطقة R لا تحتوي النقاط $z = \pm ai$

(ii) في حالة C موجود في منطقة R تحتوي $z = ai$ ولا تحتوي على $z = -ai$

(iii) في حالة C موجود في منطقة R تحتوي النقطتان $z = \pm ai$

**الحل**

(i) في الحالة الأولى فإن الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ دالة تحليلية في R وبالتالي




$$\int_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{z^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}\Big|_\alpha^\beta$$

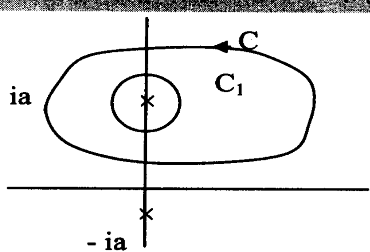
$$= \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{\beta}{a} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{a}\right]$$

وإذا كان C منحنى مغلقا فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = 0$$

طبقاً لنظرية كوشي.

(ii) في حالة احتواء النقطة $z = ai$ وعدم احتواء الأخرى فإن التكامل يعتمد على المسار بين النقطتين α وَ β(لماذا؟) فإذا كان المسار C مغلقاً فإن :




$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_C \frac{dz}{(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{1}{2ai} \oint_C \left( \frac{1}{z-ai} - \frac{1}{z+ai} \right) dz \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{2ai} \oint_{\substack{|z-ai|=\epsilon \\ z-ai=\epsilon e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-ai} - \frac{1}{2ai} \oint_C \frac{dz}{z+ai}$$

$$= \frac{1}{2ai}(2\pi i) - 0 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

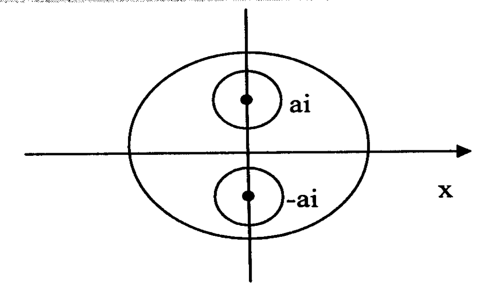
$$= \frac{\pi}{a}$$

أي أن $\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$ : pure real

(iii) وفي حالة احتواء النقطتين $z = \pm ai$ فإن التكامل يعتمد على المسار بين $\alpha$ و $\beta$ .. أما في حالة كون C منحنى مغلقاً فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left[ \oint_C \frac{dz}{z-ai} - \oint_C \frac{dz}{z+ai} \right]$$

$$= 0$$




أو استعمال النظرية العامة

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_{\substack{|z-ai|=\in \\ z-ai=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} + \oint_{\substack{|z+ai|=\in \\ z=-ai+\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z-ai} . \underbrace{(2ai+\in e^{i\theta})}_{z+ai}} + \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z+ai} . \underbrace{(-2ai+\in e^{i\theta})}_{z-ai}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2ai+\in e^{i\theta}} + i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(-2ai+\in e^{i\theta}\right)}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{2ai\, e^{-i\theta}+\in} + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\left(-2ai\, e^{-i\theta}+\in\right)} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{-1}{2ai}\left[ \ln\left(\in +2aie^{-i\theta}\right)\Big|_0^{2\pi} + \ln\left(-2aie^{-i\theta}+\in\right)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= -\frac{1}{2ai}\left[\ln(\in +2ai) - \ln(\in +2ai) + \ln(-2ai+\in) - \ln(-2ai+\in)\right]$$

$$= 0$$

وواضح أن استعمال الكسور الجزئية ييسر المسألة تيسيراً كبيراً.

والآن يمكننا التقدم خطوة أخرى في حسابات تكامل الدوال المركبة.

## ٣-٦ صيغة كوشي للتكامل Cauchy's integral formulae

### نظرية ٣-٤

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى منحنى مغلق يسير C وكانت النقطة $z = a$ داخل C فإن

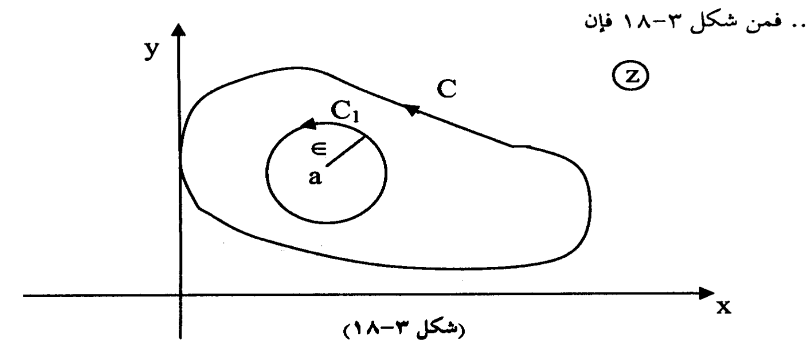
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

وبشكل عام فإن

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad n = 1,2,\ldots$$

**الإثبات**

لإثبات الحالة $n = 0$ فإننا نستخدم نفس الأسلوب الذي تعلمناه في الفصل السابق .. فمن شكل ٣-١٨ فإن




(شكل ٣-١٨)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+\epsilon e^{i\theta}\right)}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon\, i\, e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left(a+\epsilon e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (1)$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي متصلة وبالتالي فإن $\lim_{\in\to 0} f\left(a+\in e^{i\theta}\right)=f(a)$

وبأخذ النهاية عندما $\in\to 0$ لـــ (١) فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = i(f(a))2\pi$$

أي أن

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

وهذا يثبت الحالة $n = 0$.

وعند $n = 1$ فإننا نأخذ القيمة

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-(a+h)}-\frac{1}{z-a}\right]f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\frac{z-a-z+a+h}{(z-a)(z-(a+h))}f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a)f(z)}{(z-a)^2(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a-h+h)f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[(z-a-h)+(h)]f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)^2}dz$$

وواضح أنه في حالة $h\to 0$ فإن الطرف الأيسر يصبح $\dot{f}(a)$ ويأخذ الطرف الأيمن الصورة المطلوب إثباتها .. ولذلك فبأخذ الحد الثاني الطرف الأيمن:

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}=\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\in} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

وباختيار $h$ صغيرة جداً بحيث أن $z = a + h$ يكون داخل المسار $C_1$ أيضاً وبحيث يكون $|h| < \frac{\in}{2}$ .. أي أن (وباستخدام المتباينة $|a - b| \geq |a| - |b|$):

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \in - \frac{\in}{2} = \frac{\in}{2}$$

كذلك فلأن $f(z)$ دالة تحليلية فهي محدودة أي أن $|f(z)| < M$

حيث M عدد موجب .. والآن يمكننا عمل هذه الحسابات

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^2||z-a-h|} |dz|$$

$$\leq \frac{|h| M \in}{2\pi (\in^2)\left(\frac{\in}{2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2|h| M}{\in^2}$$

وعندما نأخذ النهاية $h \to 0$ فإن التكامل ينعدم وبالتالي

فإن

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

ومشياً على هذا المنوال فإن

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right] f(z)dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^3} f(z)dz$$

وبأخذ النهاية $h \to 0$ فإننا نصل للمطلوب عند $n = 2$ بإثبات أن الحد الثاني ينعدم عندما يتم التكامل على الدائرة $|z-a| = \in$ .. فبملاحظة أن

$$\begin{aligned}|(3(z-a)-2h)f(z)| &= |3(z-a)-2h||f(z)| \\ &\le (3|z-a|+2|h|)M \\ &\le \left(3\in+2\frac{\in}{2}\right)\mathrm{M} \\ &\le 4\in M\end{aligned}$$

كذلك

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3}f(z)dz\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\frac{(4\in M)}{\left(\frac{\in}{2}\right)^2\in^3} = \frac{|h|16M}{\in^3}$$

وواضح أنها تنعدم عندما $h\to 0$ .. أي أن الحد الثاني ينعدم وبالتالي فإن

$$f''(a)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

وهكذا بالاستنتاج نستطيع إثبات أن

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

ولإثبات النظرية إثباتاً كاملا فلابد من استخدام الاستنتاج الرياضي **mathematical induction**.

**ملاحظة هامة:**

(i) يمكننا ملاحظة أن الصورة

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

هي مكافئة للصورة

$$f'(a)=\frac{d}{da}f(a)=\frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z-a}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

وكذلك

$$f''(a) = \frac{d}{da}f'(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C (2)\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

وكذلك

$$f'''(a) = \frac{d}{da}f''(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}\right]$$

$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C (3)\frac{f(z)}{(z-a)^4}dz$$

وهكذا .. فهي امتداد لنظرية ليبنتز لتكامل الدوال الحقيقية والتي تمكننا من التفاضل تحت علامة التكامل.

(ii) من نتائج النظرية السابقة وطريقة إثباتها فإنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R فإن $f\,'(z)$ دالة تحليلية أيضا وكذلك $f''(z)$ .. وبشكل عام فإن $f^{(n)}(z)$ تحليلية في R.

**مثال ٣-١١**

أوجد التكامل $\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz$ حيث C يحتوي النقطة $z = 1$

**الحل:**

من صيغة كوشي للتكامل مباشرة فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

ولكن $f(z) = e^{5z}$ دالة تحليلية في كل مكان ومشتقاتها النونية $f^{(n)}(z) = (5)^n e^{5z}$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{4!}\ (5)^4\ e^5.$$

**مثال ٣-١٢**

أوجد التكامل $\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$ حيث C يحيط النقطتين $z = 1, 2$.

**الحل:**

باستخدام الكسور الجزئية فإن

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

حيث $A = -1$ و $B = 1$

أي أن

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -\oint_C \frac{\sin z}{z-1}dz + \oint_C \frac{\sin z}{z-2}dz$$

ويمكننا هنا استعمال صيغة تكامل كوشي بيسر تام حيث

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\ \ f(a)$$

أي أن

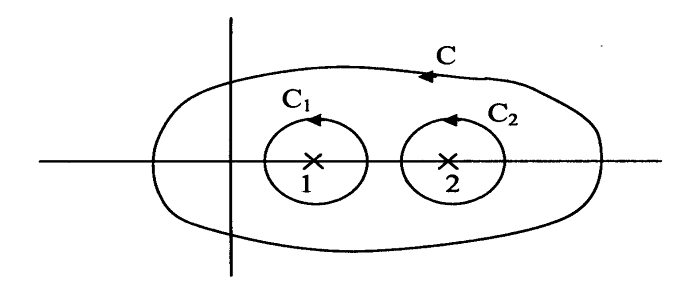
$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -2\pi i \sin(1) + 2\pi i \sin(2)$$

$$= 2\pi i[\sin(2) - \sin(1)]$$

مرة أخرى يظهر لنا أهمية الإلمام بالكسور الجزئية.

**حل أخر**

(انظر شكل ٣-١٩)




**(شكل ٣-١٩)**

(لماذا؟)

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\left(\dfrac{\sin z}{z-2}\right)}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{\left(\dfrac{\sin z}{z-1}\right)}{z-2}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-2}\right)\bigg|_{z=1} + 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)\bigg|_{z=2}$$ (لماذا؟)

$$= -2\pi i\ \sin(1) + 2\pi i\ \sin(2)$$

وهى نفس النتيجة السابقة ..

لاحظ أننا لم نستعمل الكسور الجزئية واستخدمنا النظرية العامة ٣-٣ ثم استخدمنا صيغة كوشي للتكامل على كل منحنى على حدة مع كون الدالة $\dfrac{\sin z}{z-2}$ دالة تحليلية على $C_1$ وداخل $C_1$ وكذلك الدالة $\dfrac{\sin z}{z-1}$ دالة تحليلية على $C_2$ وداخل $C_2$.

**مثال ٣-١٣**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على الدائرة C وداخلها والتي نصف قطرها r ومركزها عند $z = a$ .. اثبت متباينة كوشي Cauchy's inequality:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{M.n!}{r^n} \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

حيث $|f(z)| < M$.

**الإثبات**

يأتي الإثبات مباشرة من استعمال صيغة كوشي للتكامل

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

وبالتالي فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-a|=r} \frac{|f(z)||dz|}{|z-a|^{n+1}} \quad , \quad z = a + re^{i\theta} \quad , \quad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M\, r\, d\theta}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^n} (2\pi)$$

$$= \frac{n!\, M}{r^n}$$

وبالتالي فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n} \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

## نظرية ٣-٥: نظرية ليوفيل Liouville's theorem

إذا كانت

(i) $f(z)$ دالة تحليلية في كل z في مستوى z

وَ (ii) $f(z)$ محدودة ; $|f(z)| < M$

فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة.

**الإثبات**

بوضع $n = 1$ في المثال السابق (متباينة كوشي) فإن

$$\left|f'(a)\right| \le \frac{M}{r}$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية في كل مكان فإننا يمكننا جعل $r \to \infty$ وبالتالي $|f'(a)| \le 0$ .. أي أن $|f'(a)| = 0$ فإذا كانت $a$ نقطة عامة $z$ فان $|f'(z)| = 0$ أي أن

$$f'(z) = 0$$

وهذا لا يحدث إلا إذا كانت $f(z)$ دالة ثابتة.

**ملاحظة هامة:**

النتيجة السابقة تمكننا من إثبات النظرية الأساسية للجبر **fundamental theorem of algebra** .. والتي تقول أن الحدودية $p(z)$ من درجة $n$ في المعادلة

$$p(z) = a_0 + a_1 z + .. + a^n z^n = 0$$

يكون لها $n$ من الجذور تحقق المعادلة .. وذلك لأننا يمكننا إثبات أولا أن لها جذراً واحداً على الأقل .. فإن كانت $p(z) = 0$ ليس لها جذور فإن $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ تكون دالة تحليليـــة في كل مكان (لماذا) وبالتالي فإن $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ تكون محدودة (لماذا؟) وبالتالي طبقاً لنظرية ليوفيل فإن $f(z)$ وبالتالي $p(z)$ يجب أن تكون ثابتة .. وهذا يعارض الواقع .. وبالتالي فإن لها جذراً واحداً على الأقل يحقق $p(z) = 0$ ..

والآن إذا افترضنا أن هذا الجذر هو $\alpha$ فإننا نحصل علـــى أن $p(z) = (z-a)Q(z)$ حيــث $Q(z)$ حدودية من درجة (n-1) وبالتالي فإن لها أيضاً جذراً واحداً على الأقــل .. هكــذا نستطيع إثبات أن $p(z)$ سيكون لها n من الجذور.

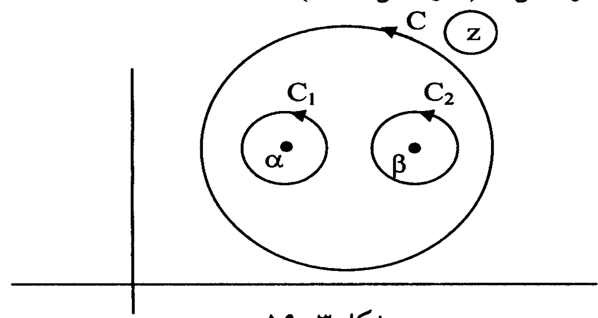
## نظرية ٣-٦ نظرية السعة The Argument Theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى مغلق يسير C وداخله باستثناء نقطة $z = \alpha$ داخل C والتي هي قطب من رتبة $p$ .. وكذلك $f(z)$ لها صفر وحيد عند $\beta = z$ داخل C برتبة $n$ (أي أن $\frac{1}{f(z)}$ لها قطب من رتبة $n$ عند $z = \beta$) .. (أنظر شكل (٣-١٩)) فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (n-p) 2\pi i$$

**الإثبات**

برسم الدائرتين $C_1$ وَ $C_2$ مركزهما $z = \alpha$ وَ $z = \beta$ على الترتيب بحيث لا يتقاطعان مع C أو داخل C (أنظر شكل ٣-١٩).




**(شكل ٣-١٩)**

أيضا إذا كانت $f(z)$ لها أصفار وأقطاب معلومة فأنه بأخذ لوغاريتم الطــرفين ثم التفاضــل سنلاحظ أن $\frac{f'(z)}{f(z)}$ سيصبح لها أقطاباً هي الأقطاب السابقة مضافاً إليها الأصفار .. أي أن الأصفار والأقطاب القديمة أصبحت هي أقطاباً للدالة الجديدة $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

وبالتالي فإن $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

والآن .. بما أن $f(z)$ لها قطب وحيد من رتبة p فإنها يمكن كتابتها على صورة

$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$ وبالتالي فإن

$$\ln f(z) = \ln F(z) - p \ln (z-\alpha)$$

وبالاشتقاق بالنسبة الي z فإن $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$

وبالتالي فإن $\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - P \oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha}$

ولكن $F(z)$ دالة تحليلية وغير صفرية على $C_1$ وداخل $C_1$ (لماذا؟)

فإن $\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0$ (لماذا؟) .. كذلك $\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -p(2\pi i) \qquad \ldots. \qquad (1)$$

والآن بما أن $f(z)$ لها صفر وحيد من رتبة $n$ فإنه يمكن كتابتها على صورة $f(z)=(z-\beta)^n G(z)$ وبنفس الطريقة

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}$$

ولكن $G(z)$ دالة تحليلية وغير صفرية على $C_2$ وداخل $C_2$ فإن

$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{C_2} \frac{G'(z)}{G(z)} dz + n \oint_{C_2} \frac{n}{z-\beta} dz$$

$$= 0 + n(2\pi i) \qquad \ldots. \qquad (2)$$ (لماذا؟)

من (1) ، (2) فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$

**مثال ٣-١٤**

إذا كان $f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)^2}$ فاثبت أن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية على C وداخل C باستثناء القطب z = 2 وأن z = 1 نقطة داخل C.

**الإثبات:**

من النظرية السابقة فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$

حيث $f(z)$ لها قطب وحيد من رتبة p ولها صفر وحيد من رتبة n وكلاهما داخل C ..
وحيث أن الشروط متوفرة و p = 2 وَ n = 1 وكلاهما داخل C فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(n-p)$$

$$= 2\pi i(1-2)$$

$$= -2\pi i$$

**ملاحظة:**

أنظر كم هي مدهشة ومريحة هذه النظرية للسعة .. وتغنينا عن إجراءات مطوّلة هي طول إثبات النظرية ذاتها .. وتخيل معي لو أن

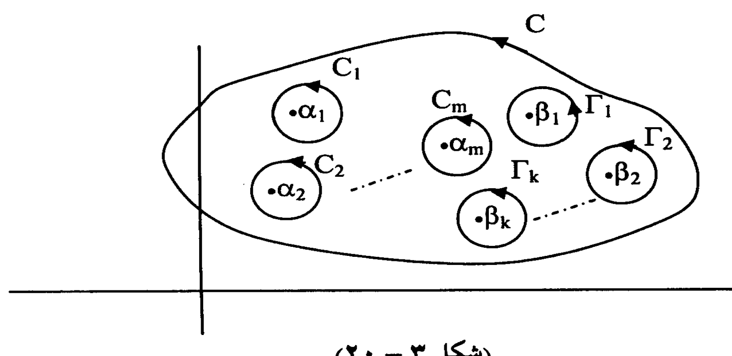
$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-2)^3(z-4)^4}$$

حيث C يحتوي النقاط z = 1 وَ z = 2 فقط وبالتالي فإن p = 3 وَ n = 2 وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(n-p)$$
$$= -2\pi i$$

كذلك لاحظ أن قيمة التكامل على هيئة $\ln f(z)$ قد استبعدناها من فكرنا تماماً (لماذا؟) .. والآن أصبحت النظريات التي تخص الدوال المركبة أكثر تميزاً وأكثر وضوحاً وهي إضافة جديدة تماماً لعلم التكامل .. لاحظ أيضاً وجود الثابت $(2\pi i)$ .. وهو مازال سراً من أسرار حساب هذه التكاملات .. والأهم من ذلك أن قيمة هذه التكاملات تخيلية فهي خيال في خيال .. ولكن أيمكن لهذا الخيال أن ينتج شيئاً واقعياً .. دعنا نري.

ويمكننا تعميم النظرية السابقة إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على C وداخل C باستثناء عدد محدود من الأقطاب $\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_m$ والتي رتبها $p_1,p_2,..,p_m$ داخل C .. وإذا كانت للدالة $f(z)$ عدد محدود من الأصفار $\beta_1,\beta_2,..,\beta_k$ والتي رتبها $n_1, n_2, .., n_k$ فإنه بعزل كل الأقطاب والأصفار بدوائر $C_i$ وَ $\Gamma_j$ بالترتيب (أنظر شكل (٣-٢٠).




(شكل ٣ – ٢٠)

فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأقطاب}} + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\oint_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأصفار}}$$

$$= -2\pi i\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) + 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k} n_k\right)$$

$$= (-P + N)2\pi i$$

$$= (N - P)2\pi i$$

حيث N وَ p هي مجموع رتب الأصفار والأقطاب للدالة $f(z)$.

**ملاحظة هامة:**

لاحظ أن نقطة الصفر نفسها أو القطب غير داخلة في الحسابات .. فقيمة التكامل لا تعتمد على موضع الأصفار أو الأقطاب فقط تعتمد على رتب هذه الأصفار والأقطاب.

**مثال ٣-١٥**

إذا كانت

$$f(z) = \frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6\left(z^2+1\right)^3}$$

فأوجد $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ .. حيث كل الأصفار والأقطاب داخل C.

**الحـــل:**

لاحظ أولا الآتي:

$$f(z) = \frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z+i)^3(z-i)^3}$$

$$= \frac{(z-1)^3(z-i)}{(z+5)^2(z+i)^9}$$

وبالتالي فأصفار الدالة عند $z = 1$ وَ $z = i$ برتب 3 وَ 1 على الترتيب وكذلك أقطاب الدالة عند $z = -5$ وَ $z=-i$ برتب 2 وَ 9 على الترتيب .

أي أن $P_1 = 2\ ,\ P_2 = 9$ وَ $n_1 = 3\ ,\ n_2 = 1$

وبالتالي فإن

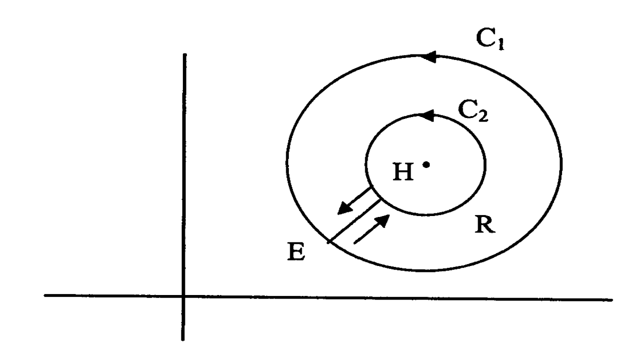
$$N = n_1 + n_2 = 3 + 1 = 4$$
$$P = P_1 + P_2 = 2 + 9 = 11$$

وبالتالي وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$
$$= 2\pi i(4 - 11)$$
$$= -14\pi i$$

**مثال ٣-١٦**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R محدودة بدائرتين متحدتا المركز concentric circles، $C_1$ وَ $C_2$ (أنظر شكل ٣-٢١) .. وكذلك $f(z)$ دالة تحليلية على $C_1$ وعلى $C_2$ فإذا كانت $z_o \in R$ فإن




(شكل ٣-٢١)

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz\right]$$

**الإثبات**

كما فعلنا سابقاً فبعمل القطع E-H كما هو مبين بالشكل فإننا يمكننا تطبيق صيغة تكامل كوشي على $f(z)$ على المسار $M : C_1' - EH - (-C_2') - HE$ وبالتالي فإن

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_M \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{-C_2'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz \right]..$$

وذلك لأن

$$\int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz = -\int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

**مثال ٣-١٧**

أوجد قيمة التكامل $\oint_C \frac{dz}{z^n}, n = 1,2,3,...$ باستخدام صيغة تكامل كوشي، حيث C منحنى مغلق يسير يحتوي $z = 0$.

**الحل**

باستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0$$

فإنه عندما $a = 0$ و $f(z) = 1$ و $n = 0$ فإن

$$\oint_C \frac{dz}{(z)} = \frac{2\pi i}{0!}(1) \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

كذلك فإن: (لماذا؟) $\oint_C \frac{dz}{z^n} = \frac{2\pi i}{n!}(0)$

$$= 0$$

**مثال ٣-١٨**

أوجد تكامل $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$ باستخدام صيغة تكامل كوشي.

**الحل:**

يبدو هذا الطلب غريباً .. فهذا تكامل حقيقي فكيف سنستعمل تكامل كوشي؟! .. دعنا نرى ذلك

نعلم أن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ فإذا أخذنا دائرة الوحدة وعليها $z = e^{i\theta}$ فإن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ وبالتالي وتعميماً للدوال المركبة فإن

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{2n}\left(\frac{dz}{iz}\right) \quad , \quad dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left[z^{2n} + {}^{2n}C_1 z^{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + {}^{2n}C_k\left(z^{2n-k}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right]dz$$

فإذا نظرنا للتكاملات في الطرف الأيمن فكلها تتلاشى ما عدا التي على صورة $\oint_C \frac{dz}{z}$ وتساوي حينئذ $2\pi i$ (أنظر المثال السابق) .. ومعامل هذا الحد هو ${}^{2n}C_n$ (لماذا؟) .. وبالتالي فإن

(لاحظ اختفاء القيمة التخيلية) ..

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n} i} \, {}^{2n}C_n \cdot (2\pi i)$$

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{2n!}{n!(n!)}$$

(من تعريف التوافيق)

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ .....\ n(n-1).....\times 2\times 1}{n!\ (n!)}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{(2n)(2n-1)(2n-2).....(n+1)n\ .....2\times 1}{2^{n}\ n!}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{(2n)(2n-2)...4\times 2}{2^{n}\ n!}\cdot\frac{(2n-1)...\times 5\times 3\times 1}{1}$$ (بإعادة الترتيب)

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{n(n-1)...\times 2\times 1}{n!}[(2n-1)...\times 5\times 3\times 1]$$

(لماذا؟)

$$=2\pi\frac{1\times 3\times 5...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6...\times 2n}$$

أي أن قيمة التكامل تم استنتاجها فعلاً بحيث يكون

$$\int_{0}^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\ {}^{2n}C_{n}$$

أما الصورة الأخيرة فلإثبات الصورة المحفوظة لها في تكامل الدوال الحقيقية أي أننـــا يمكننـــا باستخدام نظريات التكامل للدوال المركبة أن نثبت تكاملات حقيقية .. هل يمكن ذلك؟ .. نعم .

## ٣-٧ تمهيد لنظرية الباقي Residue theorem

### عارض ٣-١ الباقي Residue

إذا كانت f(z) دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C باستثناء قطب من رتبة m عند z = a داخل C فإن

$$\oint_{C} f(z)dz=2\pi i\ \ R$$

حيث
$$R=\lim_{z\to a}\frac{1}{(\mathrm{m}-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^{m}f(z)$$

**الإثبات:**

يمكن كتابة f(z) كالمعتاد على صورة

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

حيث g(z) دالة تحليلية على وداخل C وأيضاً g(a)≠0 . وبالتالي فباستخدام صيغة كوشي للتكامل فإن

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^m}dz \\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(a) \\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\Big|_{z=a} \\ &= 2\pi i\left[\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right] \\ &= 2\pi i \quad R.\end{aligned}$$

**ملاحظة:**

لأسباب سنعلمها فيما بعد فإن R تسمى بالباقي .. باقي ماذا ؟! سنعلم آنفاً.

**عارض ٣-٢**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء القطبين z = a وَ z = b داخل C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1+R_2]$$

حيث $R_{1,2}$ هما الباقيان عند نقطتي القطبين z = a وَ z = b على الترتيب.

**الإثبات:**

بعزل القطبين عند z = a وَ z = b بدائرتين $C_2, C_1$ فإنه وكما تعودنا فإن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

فإذا كررنا أسلوب الإثبات الذي أجريناه في عارض ٣-١ على كل من التكـــاملين في الطرف الثاني فإننا نصل إلى

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

حيث

$$R_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

و

$$R_2 = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to b} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-b)^k f(z)$$

بافتراض أن $z = a$ قطب من رتبة $m$ و $z = b$ قطب من رتبة $k$.

**تعميم:**

في الواقع يمكننا وبنفس الأسلوب السابق في عارض ٣ – ١ وعارض ٣ – ٢ أن نعمم هذه المسألة بحيث إذا كانت $f(z)$ لها أقطاب عند $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ من رتبة $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{\ell} R_i$$

بحيث يكون

$$R_i = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{z \to a_i} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}(z-a_i)^{m_i} f(z)$$

وهذه النظرية تسمي نظرية الباقي .. ولكن ليست هذه نظرية الباقي ذاتها ولكن تمهيد لهـــا .. لأن النقاط الشاذة الوحيدة المسموح لها للدالة حتى الآن هو الأقطاب فماذا عن بقية أنـــواع النقاط الشاذة من نقاط تفرع وأساسية .. وهل يمكن أن توجد نظرية شبيهة عامة لكل النقاط الشاذة؟!.

والآن فقط انكشف لنا سر العامل التخيلي $(2\pi i)$ .. فإن التكامل للدالة $f(z)$ على المسار المغلق اليسير C الذي يحتوي أقطاب الدالة $f(z)$ هو $2\pi i$ مضروباً في تجميع البواقي لكل الأقطاب .. يا لها من نظرية رائعة .. وهذه النظرية لها تطبيقات كثيرة سوف نتعرض لها في باب منفصل لاحق من هذا الكتاب.

**مثال ٣-١٩**

أحسب التكامل $\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz$ حيث C يحتوي النقطة $z = -i$ ولا تحتوى $z = 2$ .

**الحل**

يمكن الحل بأكثر من أسلوب

(i) باستخدام صيغة تكامل كوشي مع تصرف يسير كالآتي:

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{\left(\frac{z-1}{z-2}\right)}{(z+i)}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{0!}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)\Bigg|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-i-1}{-i-2}\right)$$

$$= 2\pi i\frac{i+1}{i+2}$$

$$= 2\pi i\frac{1}{3}(2+1+i)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3+i}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(-1+3i)$$

(ii) بأسلوب نظرية الباقي ويوجد باقي واحد $R_1$ لقطب يسير (m=0): وبالتالي:

(لماذا)

$$R_1 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to -i}(z+i).\frac{z-1}{(z-2)(z+i)}$$
$$= \frac{-i-1}{-i-2} = \frac{1+i}{2+i}$$
$$= \frac{1}{3}(1+i)(2-i)$$
$$= \frac{1}{3}(3+i)$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)(3+i)$$
$$= \frac{2\pi}{3}(-1+3i)$$

أي أسلوب تفضل لحساب هذا التكامل .. وماذا إذا تعددت الأقطاب .. في هذه الحالة لا يمكننا تطبيق تكامل كوشي مباشرة وأحياناً لا نستطيع تطبيقها .. بينما يمكننا تطبيق نظرية الباقي ..

## تمرينات ٣

١. احسب $\int_{1+i}^{1-i} |z|^2 dz$ على المسارات التالية

(i) المسار الأفقي ثم المسار الرأسي

(ii) المسار الرأسي ثم المسار الأفقي

(iii) الخط الواصل بين النقطتين

وما هو تعليقك على قيمة التكامل.

٢. احسب $\oint_C (x+2y)dx+(y-2x)dy$ حول القطع الناقص C المعرف بـــ

$0 \le \theta < 2y \quad , \quad y = 3\sin\theta \quad , \quad x = 4\cos\theta$

(الإجابة: $-48\pi$)

٣. احسب $\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dz$ على القطع المكافئ $y = 2x^2$ مـــن النقطـــة (1,1) إلى النقطة (2,8) في (z)

(الإجابة: $\frac{511}{3} - \frac{49}{5}i$)

٤. اثبت أن $\int_C e^{-2z}dz$ مستقلة عن المسار الذي يربط بين النقطتين $1-\pi i$ وَ $2+3\pi i$ وأوجد قيمة التكامل.

(الإجابة: $\frac{1}{2}e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)$)

٥. إذا كانت $G(z) = \int_{1+i}^{z} \sin z^2 \, dz$ فأثبـــت أن G(z) دالـــة تحليليـــة في z وأن $G'(z) = \sin z^2$.

٦. احسب $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$ عبر الخط $x + y = 1$ في اتجاه زيادة x (الإجابة: $\left(\frac{\pi}{2}\right)$)

٧. هل يمكنك تطبيق نظرية كوشي على الدالة $w=\sqrt{z}$ حيث C هو دائـــرة الوحـــدة $|z| = 1$ . وضح.

٨. إذا كانت C بحيث $|z| = R$ اثبت ان

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz = 0$$

٩. اثبت نظرية متوسط القيمة الجاوسى Gauss mean value theorem: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C التي مركزها عند $z = a$ ونصف قطرها r فإن $f(a)$ هو القيمة المتوسطة لـــ $f(z)$ .. أي أن

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

١٠. احسب

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{\sin \pi z^2+\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz \qquad \text{(i)}$$

((4πi) الإجابة)

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz \qquad \text{(ii)}$$

($8\pi i\, e^{-2/3}$ :الإجابة)

١١. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة $C: |z| = R$ وكان

$$f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2} f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)d\phi \quad ، \quad r<R$$

حيث يتم التكامل على C فاثبت أن الجزء الحقيقي $u(r, \theta)$ والتخيلي $v(r, \theta)$ لـــ $f(r\, e^{i\theta})$ هما

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)u(R,\phi)d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (i)$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)v(R,\phi)d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (ii)$$

يطلق على هذا التكامل $\oint_C f(z)dz$ بتكامل بواسون. ولإثباته لابد من الرجوع الى [ ].

١٢. احسب $\oint_{\substack{C\\|z|=4}}\frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}\,dz$

الإجابة $\left(\frac{i}{\pi}\right)$.

١٣. احسب التكامل $\oint_{\substack{C\\|z|=2}}\frac{dz}{z+1}$ ومن ثم اثبت أن

$$\oint_C\frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}=0, \qquad \oint_C\frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi$$

١٤. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل المنحنى المغلق اليسير C .. فاثبت أن

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (i)$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (ii)$$

**مساعدة:**

يمكنك أخذ التكامل على الدائرة $|z| = a$ .. واستعمال صيغة تكامل كوشي.

١٥. إذا كانت $g(z)$ دالة تحليلية على وداخل C وكانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء أن لها أقطاباً عند النقاط $b_1, b_2, .., b_n$ داخل C وكذلك لها أصفار عند النقاط $a_1, a_2, .., a_m$ داخل C أيضاً وبرتبة $p_1, p_2, .., p_n$ للأقطاب وَ $q_1, q_2, .., q_m$ للأصفار .. على ضوء إثبات نظرية السعة argument theorem اثبت أن

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} P_k g(a_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k g(b_k)$$

١٦. على ضوء تمرين (١٥) .. وإذا كانت

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + .. + a_n \quad , \quad a_i \in C \; \forall_i$$

وكان C منحنى مغلق يسير يحتوي كل أصفار الحدودية $f(z)$ فاثبت أن

$$\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \left(-\frac{a_1}{a_o}\right)(2\pi i)$$

$$\oint_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \left(\frac{a_1^2 - 2a_o a_2}{a_o^2}\right)(2\pi i)$$

# الباب الرابع

## نظريـــــة الباقي
## The Residue Theorem

### ٤-١ متسلسلة تايلور ومتسلسلة لورنت Taylor's and Laurent's Series:

#### ٤-١-١ نظرية تايلور Taylor's Theorem

**نظرية ٤-١**

دع $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C وَ دع النقطتان a وَ a + h داخل C .. فإن

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

أو بوضع z = a + h وبالتالي h = z - a فإن

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

**الإثبات:**

لكل z داخل C (أنظر شكل ٤-١) يمكن أخذ دائرة $C_1$ مركزها عند نقطة a وتحتوي z .. وبالتالي بتطبيق صيغة كوشي للتكامل فإن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (1)$$



(شكل ٤-١)

ولكن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\left[\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]^{-1},\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$ (لماذا)

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right]$$

باستعمال المفكوك $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+..+z^{n-1}+z^n.\frac{1}{1-z}$

وبالتالي

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{w-z} \quad (2)$$

والآن بضرب (2) في f(w) واستعمال الصيغة في (1) فإن

$$2\pi i\ f(z)=\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}dw+z-a\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\ldots$$

$$+(z-a)^{n-1}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}dw+R_n \quad (3)$$

حيث

$$R_n=\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

وباستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}_{(a)}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

فإن (3) تصبح

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+U_n$$

حيث $U_n=\frac{1}{2\pi i}R_n$

والآن بما أن $w$ على الدائرة $C_1$ فإن $\left|\frac{z-a}{w-a}\right|=\gamma<1$

أيضا فإن $M>|f(w)|$ حيث $M$ ثابت موجب .. كذلك

$$|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\geq|w-a|-|z-a|$$

$$=r_1-|z-a|$$

حيث $r_1$ هي نصف قطر الدائرة $C_1$ فإن

$$|U_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\left|\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^n\frac{|f(w)|}{|w-z|}|dw|\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\,\frac{\gamma^n M}{r_1-|z-a|}\,2\pi r_1$$

$$=\frac{\gamma^n M\,r_1}{r_1-|z-a|}$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}|U_n|=0$ (لماذا؟)

وبذلك نكون قد أثبتنا صيغة متسلسلة تايلور اللانهائية

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

**ملاحظات**

١- يلاحظ أن متسلسلة تايلور هي المتسلسلة المعتاد عليها في فك الدوال الحقيقية وتحت نفس الشروط تقريبا مع الاكتفاء بأن $f(z)$ دالة تحليلية لأن ذلك يعني وجود كل رتب مشتقات هذه الدالة بشكل تلقائي وبالتالي فحساب مفكوك تايلور للدوال المركبة سيكون شبيهاً جداً لنفس الدوال في صورهَا الحقيقية فمثلاً

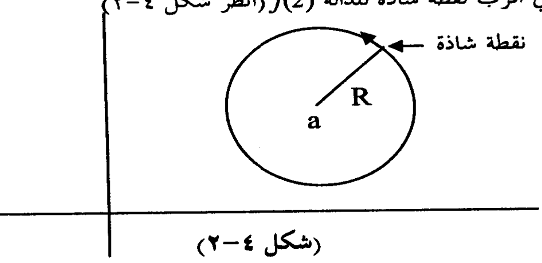
$$1.\ e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+..+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

$$2.\ \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ ..+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+..$$

$$3.\ \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

وهذه دوال تحليلية في كل مكان ولذلك فليس هناك قيد على قيمة $z$ طالما كانت $|z|<\infty$.

٢- مثل أي متسلسلة لانهائية لابد أن يكون هناك مشاكل في مجموعها .. فإذا كان محدوداً فهي متقاربة convergent وإذا كان غير محدود (لانهائي) فهي متباعدة .. وهذا يعطي قيد على المنطقة التي يمكننا استعمالها فيها وتسمى هذه المنطقة بمنطقة التقارب convergence region .. وبالنسبة لمفكوك تايلور فإن منطقة التقارب تعطي بـ $|z-a|<R$ حيث $R$ هو نصف قطر التقارب .. تماماً مثل مفهوم التقارب لمتسلسلة تايلور أو متسلسلات القوى power series بشكل عام حيث $R$ هي المسافة من النقطة $a$ إلي أقرب نقطة شاذة للدالة $f(z)$ (أنظر شكل ٤-٢)




(شكل ٤-٢)

ويجدر الإشارة أنه على الدائرة $|z-a| = R$ فإنه ربما تتقارب المتسلسلة أو لا تتقارب .. إذ يجب بحث ذلك على انفراد.

٣- خارج نطاق هذه الدائرة $|z-a| > R$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة ..

وعلى ضوء ذلك فهناك متسلسلات عليها قيود كالآتي:

$$4.\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots,\quad |z|<1$$

$$5.\ \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,\quad |z|<1$$

$$6.\ (1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}z^n + \ldots,\quad |z|<1$$

حيث $p$ كمية سالبة أو كسرية.

**مثال ٤-١**

أثبت أن مفكوك $\ln(1\text{-}z)$ وَ $f(z)=\ln(1+z)$ حول $z = 0$ هو

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

حيث $|z| < 1$.

**الإثبات**

باستعمال صيغة مفكوك تايلور فإن

$f(0) = \ln 1 = 0$     $f(z) = \ln(1+z)$

وبالتالي

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}\quad,\quad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}\quad,\quad f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2!}{(1+z)^3}\quad,\quad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}\quad,\quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}$$

وبالتالي فإن

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

$$=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}(z)+\frac{f''(o)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(o)}{n!}z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{2!z^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\ z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ z^n+\ldots$$

والآن فهناك نقطة شاذة عند $z = -1$ ولذلك فإن نصف قطر التقارب سيكون $R = 1$ (لماذا؟) وتكون منطقة التقارب هي

$$|z-0|<1$$

وبالتالي فشرط التقارب هو $|z|<1$

**مثال ٤-٢:**

أثبت أن $\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\ z^{2n+1}}{2n+1}$ حول $z = 0$.

وأن $|z|<1$ هو شرط التقارب

**الإثبات:**

يمكننا إيجاد مفكوك ماكلورين $(z = 0)$ للدالة $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$

ولكن يمكن الاستفادة من نتائج المثال السابق كالآتي:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\ldots,\qquad |z|<1$$

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots-\frac{z^n}{n}-\ldots,\qquad |z|<1$$

لأن في الحد العام $(-1)^{n-1}(-1)^{n} = (-1)2^{n-1} = -1$

وبطرح المتسلسلتين وبشرط أن $|z| < 1$ فإن

$$\ln(1+z)-\ln(1-z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

حيث n عدد فردي

$$= 2z + 2\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^5}{5} + \ldots + 2\frac{z^n}{n} + \ldots$$

$$= 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{(2n+1)}}{(2n+1)}$$

وطبعا مازال شرط التقارب هو $|z| < 1$ .

**مثال ٤-٣:**

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{1+3z}$

**الحل:**

في هذه الحالة فإن

$$f(z)=\frac{1}{1+3z}=(1+3z)^{-1}$$

$$=1-3z+9z^2-27z^3+\ldots+(-1)^{n-1}(3z)^n+\ldots$$

$$=1-3z+9z^2-\ldots+(-1)^{n-1}(3)^n(z)^n+\ldots$$

وشرط التقارب في هذه الحالة هو $|3z| < 1$

أي أن $|z| < \dfrac{1}{3}$ .

**مثال ٤-٤:**

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(5-4z)^2}$

الحـــل:

في هذه الحالة نستفيد أيضا من مفكوك $(1+z)^p$ تحت شرط $|z| < 1$ ولكن مع استبدال z بدالة لها ..

$$\frac{1}{(5-4z)^2} = \frac{1}{25\left(1-\frac{4}{5}z\right)^2} = \frac{1}{25}\left(1+\frac{4}{5}z+\left(\frac{4}{5}\right)^2 z^2+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{4}{5}\right)^n z^n+\dots\right)$$

وبشرط أن $\quad |\frac{4}{5}z| < 1$

أي أن $\quad |z| < |\frac{5}{4}| = \frac{5}{4}$

ونلاحظ هنا أننا طالما داخل منطقة بها f(z) دالة تحليلية فإن كل أساليبنا شبيهة تماما لتصرفاتنا مع الدالة الحقيقية .. فالذي فعلناه وغيره مباح تماماً.

## ٤-١-٢ نظرية لورنت Laurent's Theorem

(نظرية ٤-٢)

دع f(z) دالة تحليلية وذات قيمة وحيدة **single-valued** على الدائرتين $C_1$ و $C_2$ وبينهما في R (أنظر شكل ٤-٣) ذو الشكل الحلقي **ring-shaped or annulus** والذي له المركز عند النقطة z = a .. ونصف قطر $C_1$ هو $R_1$ ونصف قطر $C_2$ هو $R_2$ كما هو مبين بالشكل فإنه لكل $z \in R$

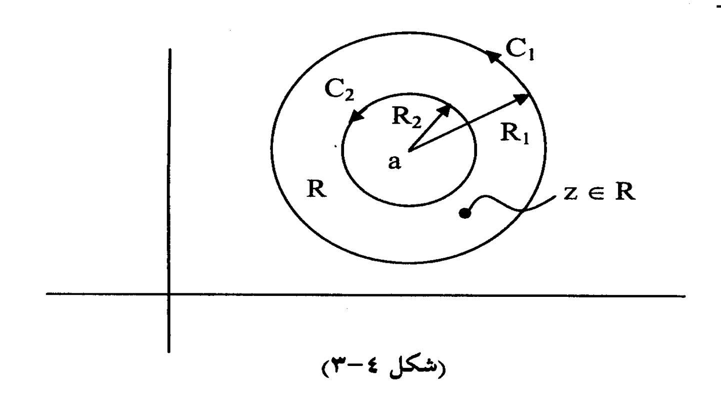
$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

والمسار المغلق اليسير C داخل المنطقة R.

**الإثبات:**




(شكل ٤-٣)

من مثال ٣-١٦ ص ١٠٣ أثبتنا الآتي لكل $z \in R$ أن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{\underbrace{w-z}_{C_1 \text{ على } w}}dw-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{\underbrace{\eta-z}_{C_2 \text{ على } \eta}}d\eta \qquad (1)$$

وهي صيغة كوشي للتكامل مطبقة على هذا الشكل الحلقي.

وبالنسبة للتكامل الأول في الطرف الأيمن من (1) فإن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{(w-a)\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]}$$

$$=\left(\frac{1}{w-a}\right)\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \ldots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{w-z} \quad (2)$$

مع الشرط المعتاد لهذا الفك وهو أن $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$ وهذا حادث فعلا لأن $w$ موجودة على الدائرة $C_1$ و $z$ نقطة في $R$ . وبالتالي فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + (z-a) \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \ldots$$

$$\ldots + (z-a)^{n-1} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw + R_n$$

حيث $$R_n = \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

وباستعمال صيغة تكامل كوشي فإننا نصل إلى الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n \quad (3)$$

حيث

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad (4)$$

وكذلك فإن

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (5)$$

وبأخذ التكامل الثاني في الطرف الأيمن من (1) فإن:

$$-\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{z-\eta} = \frac{1}{(z-a)-(\eta-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\eta-a}{z-a}\right)}$$

لاحظ أن $\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right|<1$ لأن η تقع على الدائرة $C_2$

وبالتالي يمكننا استخدام نفس المفكوك السابق استخدامه في التكامل الأول كالآتي:

$$-\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{z-a}+\frac{\eta-a}{(z-a)^2}+\dots+\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{z-\eta}$$

وبالتالي فإن

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{(\eta-z)}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{z-a}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)(\eta-a)}{(z-a)^2}d\eta$$

$$\dots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}f(\eta)d\eta+V_n$$

$$=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\dots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+V_n \qquad (6)$$

حيث

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(\eta-a)^{n-1}f(\eta)d\eta \qquad (7)$$

$$n=1,2,3,\dots$$

وَ

$$V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{f(\eta)}{z-\eta}d\eta$$

ومن (3) و (6) فإن

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\dots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}$$

$$+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\dots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+U_n+V_n \qquad (8)$$

ويبقى أن نثبت أن $U_n$ و $V_n$ يتلاشيان عندما $n\to\infty$ وقليل من الاضافات الصغيرة:

واثبات أن $\lim_{n\to\infty}|U_n| = 0$ شبيه تماماً لما قمنا به في نظرية تايلور ..

والآن على $C_2$ فإن $\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right| = k < 1$

وكذلك نعلم أن $|f(\eta)| < M$

وأيضاً $|z-\eta| = |z-a-(\eta-a)|$

$\geq |z-a| - R_2$

وبالتالي فإن

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n \frac{f(\eta)}{z-\eta}\,d\eta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right|^n \frac{|f(\eta)|}{|z-\eta|}\,|d\eta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\ \frac{k^n M}{|z-a|-R_2}$$

$$= \frac{k^n\ M\ \ R_2}{|z-a|-R_2}$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}|V_n| = 0$

أي أن $V_n = 0$ .. وبالتالي يكتمل الإثبات.

**ملاحظات:**

(1) وجود النقطة الشاذة عند $z = a$ في المركز هو الذي سبب كل ذلك التغيير .. وفي حالة عدم وجودها فإن مفكوك لورنت يصبح مفكوك تايلور لأن $f(z)$ في هذه الحالة تصبح تحليلية في المنطقة R والتي تمتد لأسفل لتصبح دائرة واحدة.

(2) يمكننا التكامل على دائرة C بين الدائرتين $C_1$ و $C_2$ بحيث يكون

$$(4) \qquad a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw$$

كذلك

$$(7) \qquad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (\eta - a)^{n-1} f(\eta) d\eta \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} (\eta - a)^{n-1} f(\eta) d\eta$$

وهذا يجعلنا نكتب الحد العام الآتي:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ففي حالة $m = 0,1,2,\ldots$ تعطي (4)

وفي حالة $m = -1,-2,\ldots$ تعطي (7)

وبالتالي يعتبر هذا حداً عاماً .. وبالتالي فإن

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

وهي الصورة العامة لمفكوك لورنت.

(3) يطلق على الحدود ذات الرتبة الموجبة، أي

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

بالجزء التحليلي analytic part لمفكوك لورنت، بينما يطلق على الحدود ذات الرتبة السالبة، أي

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots$$

بالجز الأساسي principal part لمفكوك لورنت وجدير بالذكر بإنه في حالة اختفاء النقطة الشاذة فإن الجزء الأساسي ينعدم ليصبح المفكوك مفكوك تايلور العادي .. فهذا الجزء يتكون مع تكون الشذوذ.

(4) عند $z = a$ نقطة شـــاذة .. هذا الشذوذ لم تحدد نوعه .. فهو عام .. فربما يكون قطباً أو تفرعاً أو يمكن إزالته .. أو أساسياً.

فعندما تكون $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ فإن $z = a$ تكون قطباً (وليكن رتبته $n$) وعندئذ نجد أن الجزء الأساسي من مفكوك لورنت يكون له عدد محدود بهذه الكيفية

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \quad , \quad a_{-n} \neq 0$$

أما إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وغير معرفة عند $z = a$ ولكن $\exists \lim_{z \to a} f(z)$ فإن $z = a$ تسمى بالنقطة الشاذة المزالة **removable**، وفي هذه الحالة نعيد تعريف الدالة عند $z = a$ بقيمة النهاية .. ونقوم بحساب المفكوك.

فإذا كانت $z = a$ نقطة تفرع للدالة متعددة القيم **multi-valued** فإنها تكون نقطة شاذة .. على أن كل فرع للدالة هو دالة تحليلية ويمكن فكه بمفكوك تايلور والذي له نصف قطر تقارب يقاس بالمسافة بين نقطة الفك ونقطة التفرع.

وأي نوع من الشذوذ خلاف الأنواع الثلاثة السابقة يسمى بالشذوذ الأساسي **essential** وفي هذه الحالة فإن الجزء الأساسي من مفكوك لورنت يصبح لانهائياً في حدوده.

ونقطة اللانهاية $\infty$ تنتج نقطة شاذة عند مالا نهاية **singularity at** $\infty$ فمثلا $f(z) = z^2$ لها قطب من الرتبة الثانية عند $\infty$ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2}$ لها قطب عند $w = 0$ من الرتبة الثانية

وكذلك $f(z) = e^z$ لها نقطة شاذة أساسية عند $\infty$ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$ لها نقطة شاذة أساسية عند $w = 0$.

والدالة التي هي تحليلية في كل مكان من مستوى $w$ (ماعدا النقاط عند $\infty$ طبعاً) تسمى بالدالة الكلية **entire function** من أمثال الدوال $e^z, \sin z, \cos z$ و $\sinh z$ وَ $\cosh z$ .. وهي دوال يمكن فكها بمفكوك تايلور ولها نصف قطر تقارب لا نهائي.

**مثال ٤-٥:**

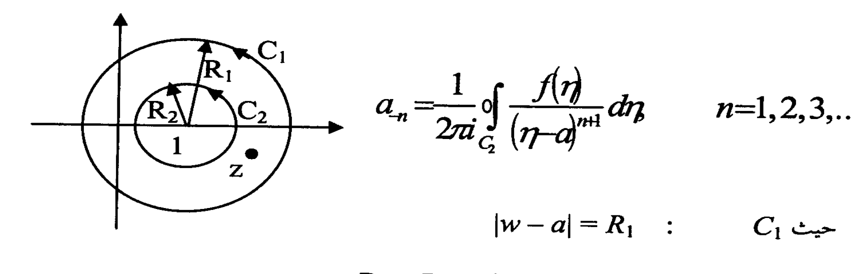
أوجد مفكوك لورنت لـــ $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}$ حول $z=1$

**الحل:**

دعنا نقدم حلاً تفصيلياً .. فبناءً على نظرية لورنت فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\,, \qquad n=0,1,2,\ldots$$ حيث




$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}}\,d\eta \qquad n=1,2,3,\ldots$$

حيث $C_1 \quad : \quad |w-a|=R_1$

$C_2 \quad : \quad |\eta-a|=R_2 \quad R_1>R_2$

في هذه المسألة فإن $a=1$ وهي تمثل نقطة شاذة للدالة من نوع القطب Pole من رتبة 2.

وبالتالي فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-1)^n}$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{e^{w}}{(w-1)^{n+3}}\,dw,$$

ومن صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a)=\frac{(n!)}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dw,$$

أي أن $\quad n=0,1,2,\ldots$

$$a_n=\left.\frac{e^w}{(n+2)!}\right|_{w=1}=\frac{e}{(n+2)!},$$

كذلك

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2(\eta-1)^{-n+1}}d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^{3-n}}d\eta$$

والتكامل ينعدم عند $n = 3,4,5,\ldots$ (لماذا؟)

ولكن عندما تكون $n = 1$ فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2}\,d\eta$$

$$=\left.\left(e^\eta\right)'\right|_{\eta=1}=e$$

وعندما تكون $n = 2$ فإن

$$a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)}\,d\eta$$

$$=\left.e^\eta\right|_{\eta=1}=e$$

بينما تنعدم بقيمة الحدود في الجزء الأساسي من المفكوك .. وبالتالي فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}=\underbrace{\frac{e}{z-1}+\frac{e}{(z-1)^2}}_{\text{الجزء الأساسي}}+\underbrace{e\left[\frac{1}{2!}+\frac{(z-1)}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{(n+2)!}+\ldots\right]}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

والآن نستطيع أن نقدم حلاً مختصراً كالآتي:

بوضع $z-1=u$

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{1+u}}{u^2}=\frac{e}{u^2}\left[e^u\right]$$

$$=\frac{e}{u^2}\left[1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=e\left[\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2}+\frac{u}{3!}+\ldots+\frac{u^{n-2}}{n!}+\ldots\right]$$

C2

1

$R_1\to\infty$

بوضع $u=z-1$ مرة أخرى فإن

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=e\left[\underbrace{\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{z-1}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}}_{n\geq 2}+\ldots\right]$$

وهو بالطبع نفس المفكوك السابق.

ولاحظ أن الجزء الأساسي به حدان فقط (لأن رتبة القطب 2) وأن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم $z$ ما عدا $z=1$.

**مثال ٤-٦:**

وفي حالة الدالة $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ عند $z=1$

**الحل:**

فإنه بوضع $z-1=u$ فإن

$$f(z)=\frac{e^{2(1+u)}}{u^3}=\frac{e^2e^{2u}}{u^3}$$

$$=\frac{e^2}{u^3}\left[1+(2u)+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2u)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{e^2}{1}\left[\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^2}+\frac{(2)^2}{2!u}+\frac{(2)^3}{3!}+\ldots+\underbrace{\frac{(2)^nU^{n-3}}{n!}}_{n\geq 3}+\ldots\right]$$

وبوضع $u = z - 1$ فإن

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2\left[\underbrace{\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)}}_{\text{الجزء الأساسي}} + \underbrace{\frac{(2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2)^n (z-1)^{n-3}}{n!} + \ldots}_{\substack{n \geq 3 \\ \text{الجزء التحليلي}}}\right]$$

لاحظ أن الجزء الأساسي به ثلاثة حدود (لأن القطب من رتبة 3).

**مثال ٤-٧:**

إذا طلب مفكوك لورنت للدالة $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)}$ حول $z = 2$

فإن الدالة تحليلية عند $z = 2$ ولذلك فإن المفكوك الذي سنحصل عليه هو مفكوك تايلور .. ونصف قطر التقارب هو R بحيث $|z - 2| < R$ هي منطقة التقارب .. أي أن أي نقطة واقعة في هذه المنطقة ستؤدي إلى تقارب هذه المتسلسلة .. وفى حالتنا هذه فإن $R = 1$ (لماذا؟) وبالتالي

(شكل ٤-٤)

$$f(z) = \frac{e^{z-2+2}}{(z-2+2-1)} = \frac{e^2 e^{(z-2)}}{(1+(z-2))} = e^2 e^{z-2}(1+(z-2))^{-1}$$

$$= e^2\left(1+(z-2)+\ldots+\frac{(z-2)^n}{n!}+\ldots\right)\left(1-(z-2)+(z-2)^2-\ldots+(-1)^n(z-2)^n+\ldots\right)$$

$$= e^2(1+(1+(-1)))(z-2)+(1-1+\frac{1}{2!})(z-2)^2$$

$$+(-1+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})(z-2)^3+(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})(z-2)^4+\ldots)$$

$$= e^2\left(1+\frac{1}{2!}(z-2)^2+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\right)(z-2)^3+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)(z-2)^4+\ldots\right)$$

وهو مفكوك تايلور كما نرى ومنطقة التقارب هي $|z-2| < 1$ كما هو مبين بالرسم.

**ملاحظة:**

لإيجاد مفكوك تايلور فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{z-1} \rightarrow f(2)=\frac{e^2}{1}$$

$$f'(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z}{z-1}-\frac{e^z}{(z-1)^2} \rightarrow f'(2)=e^2-\frac{e^2}{1}=0$$

$$f''(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}-\frac{(z-1)^2e^z-e^z2(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$\rightarrow f''(2)=0-\frac{e^2-2e^2}{1}=+e^2$$

وفي النهاية

$$f(z)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(z-2)+\frac{f''(2)}{2!}(z-2)^2+\ldots$$

$$=e^2+0-\frac{e^2}{2!}(z-2)^2+\ldots$$

وتعتبر الطريقة الأولى مختصرة ومباشرة في الحل.

**مثال ٤-٨**

أوجد مفكوك $\sin\frac{1}{z}$ حول $z=0$

**الحل:**

$z=0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وبالتالي فإنه بوضع $\frac{1}{z}=u$

$$\sin u=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad ,$$

وبوضع $u=\frac{1}{z}$ فإن

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{1}{(z)^{2n-1}}$$

لاحظ أنه جزء أساسي فقط وعدد حدوده لانهائي (لأن الشذوذ هنا من النوع الأساسي) .. والمتسلسلة متقاربة عند $z\neq 0$.

**مثال ٤-٩:**

بالنسبة لمفكوك $e^{\frac{1}{z}}$ حول $z=0$

**الحل:**

$z=0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي وبالتالي فان

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+\ldots$$

ونلاحظ هنا أيضا أن عدد حدود الجزء الأساسي لا نهائي .. وأن الجزء التحليلي هو (1) فقط ويتم الحصول عليه عند $\infty$ .. والمتسلسلة متقاربة عند $z\neq 0$.

**مثال ٤-١٠:**

بالنسبة لمفكوك $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ .. عند $z=0$

**الحل:**

نلاحظ أن الشذوذ هنا من النوع المُزال لأن $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ ويجري تعريف الدالة عند $z=0$ بأن قيمتها مساوية لـــ (1) .. وبالتالي ..

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\ldots\right]$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

ونلاحظ هنا أنها جزء تحليلي فقط (لأن الشذوذ مُزال) وهي متقاربة لجميع قيم z.

**مثال ٤-١١:**

مفكوك لورنت للدالة $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ حول $z = -2$

**الحل:**

$z = -2$ قطب يسير(من رتبة 1) ... بوضع $u = z + 2$ .. أي أن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\frac{1}{1-u}$$

$$= \frac{2-u}{u}(1-u)^{-1}, \quad |u| < 1$$

$$= \frac{2-u}{u}\left(1 + u + u^2 + \ldots\right)$$

$$= (2-u)\left(\frac{1}{u} + 1 + u + u^2 + \ldots\right)$$

$$= \left(\frac{2}{u} + 2 + 2u + 2u^2 + \ldots - 1 - u - u^2 - \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots$$

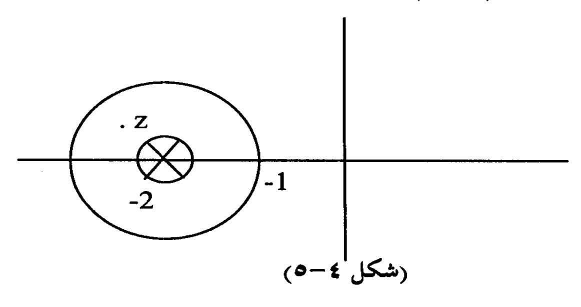
وبوضع $u = z + 2$ مرة أخرى فإن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \underbrace{\frac{2}{z+2}}_{\text{الجزء الأساسي}} + 1 + \underbrace{(z+2) + (z+2)^2}_{\text{الجزء التحليلي}} + \ldots$$

ونلاحظ هنا أن الجزء الأساسي مكون من حد واحد لأن الدالة لها قطب يسير simple pole عند $z = -2$.

ومن شروط المفكوك فإن منطقة التقارب هي

$$0 < |z + 2| < 1$$



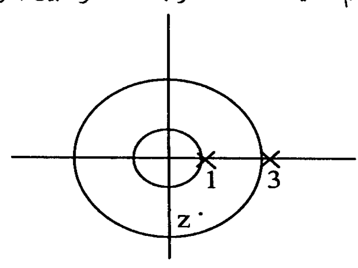

(شكل ٤-٥)

**مثال ٤-١٢**

فك الدالة $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ بحيث تكون محققة في المنطقة $1 < |z| < 3$

**الحل:**

في هذه الحالة يتم تحديد منطقة التقارب كما هو مبين بالرسم




(شكل ٤-٦)

ولابد من مراعاة ذلك عند القيام بفك الدالة .. فبإجراء الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}\frac{1}{3+z}$$

لا يمكننا الفك المباشر $(1+z)^{-1}$ إلا إذا كان $|z| < 1$ .. وهذا يتعارض مع منطقة التقارب المفروضة علينا .. وبالتالي لابد من إجراء جبري يدخلنا في فترة التقارب وذلك يتم كالآتي:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}, \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$$

وهذا يتفق مع شرط التقارب المعطى .. وبالتالي

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right) \qquad (1)$$

كذلك فإن فك $\frac{1}{3+z}$ لابد أن يراعى فيه الشرط السابق ..

$$\frac{1}{3+z}=\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}, \quad \left|\frac{z}{3}\right|<1 \Rightarrow |z|<3$$

وهذا يتفق مع الشرط .. وبالتالي :

$$\frac{1}{3+z}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}-\ldots\right)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}\ldots\right)$$

$$=\ldots\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{z}}_{\text{الجزء الأساسي}}\underbrace{-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{45}}_{\text{الجزء التحليلي}}\ldots.$$

لاحظ أن مركز الدائرتين $|z| = 1$ وَ $|z| = 3$ هو $z = 0$ وهي هنا ليست نقطة شاذة (ليست قطباً) وبالتالي فإن الجزء الأساسي عدد حدوده لانهائية.

**مثال ٤-١٣**

بالنسبة للمثال السابق آخذين فترة تقارب $|z| < 1$

1

(شكل ٤-٧)

**الحل:**

في هذه الحالة نلاحظ أن الدالة

$f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ تحليلية بالكامل

وبالتالي سنحصل على مفكوك تايلور كالآتي

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3+z}$$

$$= \frac{1}{2}(1+z)^{-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}, \quad |z|<1 \quad , \quad |z|<3$$

أي أن $|z| < 1$ وَ $|z| < 3$ وتقاطع الشرطين هو أن $|z| < 1$ فهو يحقق الأثنين معاً .. وبالتالي

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(1 - z + z^2 - z^3 - \ldots\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 - \ldots$$

أي مفكوك تايلور .. وهو محقق لكل z في $|z| < 1$.

**مثال ٤-١٤**

ماذا يحدث للمثالين السابقين إذا جعلنا فترة التقارب $|z| > 3$

**الحل:**

لابد وأن تتفق شروط المفكوك مع المنطقة الجديدة المعطاة ..

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}\right)^{-1}$$

والشرطان هما $1 < |z|$ و $3 < |z|$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن الشرط $3 < |z|$ يحقق الاثنين معا .. وعنده

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{27}{z^3}-\ldots\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}+\ldots}_{\text{جزء أساسي فقط}}$$

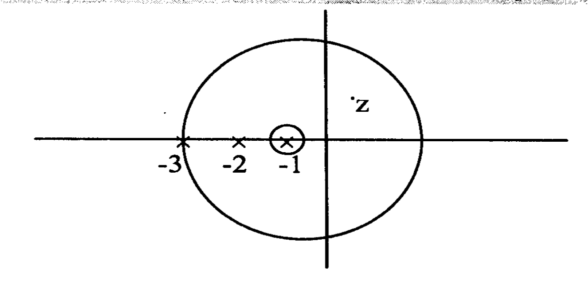
والفك لم يتم حول أي من القطبين

$z = -3$ أو $z = -1$

وبالتالي لا يوجد جزء تحليلي وعدد حدود الجزء الأساسي لا نهائي.

مثال ٤-١٥

وفى حالة عزل أحد القطبين .. وليكن $0 < |z + 1| < 2$




(شكل ٤-٨)

فأنه بوضع $z + 1 = u$ فإن

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u\left(1+\frac{u}{2}\right)} = \frac{1}{2u}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-1},$$

تحت شرط أنه $|u| > 0$ وأن $\left|\frac{u}{2}\right| < 1$ أي أن $|u| < 2$

وبالتالي يمكننا إجراء التالي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2u}[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\dots \\ &= \frac{1}{2u}-\frac{1}{4}+\frac{u}{8}-\dots \\ &= \underbrace{\frac{1}{2(1+z)}}_{\text{الجزء الأساسي}}\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{(1+z)}{8}-\dots}_{\text{الجزء التحليلي}}\end{aligned}$$

ونلاحظ هنا أنه لأننا عزلنا القطب $z = -1$ فإن الجزء الأساسي يبين أنه حد واحد يتفق مع كونه قطباً يسيراً .. Simple Pole.

والملاحظ هنا أنه إذا كان الشذوذ قطبياً والفك حول نقطة القطب فإن عدد حدود الجزء الأساسي يجب أن يساوي رتبة هذا القطب وأن الدالة إذا كانت تحليلية في منطقة الفك بالكامل فإن مفكوك لورنت ينطبق مع مفكوك تايلور لهذه الدالة .. فإذا كانت المنطقة تعزل نقاط الشذوذ فإننا سنحصل على الجزء الأساسي فقط ..

## ٤-٢ نظرية الباقي The Residue Theorem

### ٤-٢-١ مقدمة

بالنظر إلى مفكوك لورنت للدالة $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C الا عند النقطة $z=a$ والتي هي مركز الدائرة أيضا وحيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,...$$

فإذا ما أردنا إيجاد $\oint_C f(z)dz$ .. فإن الجزء التحليلي من المفكوك يعطى صفراً (لماذا؟) ..

أما الجزء الأساسي فيعطى تكاملات على صورة

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^m}=\begin{cases} 2\pi i & m=1 \\ 0 & m\neq 1 \end{cases}$$

أى لا يتبقى من هذه التكاملات إلا التكامل $\oint_C \frac{dz}{(z-a)}$ .. وهو الخاص بالمعامل $a_{-1}$ ..

ولذلك فمن وجهة نظر التكامل $\oint_C f(z)dz$ .. فإن $a_{-1}$ هي المعامل البـــاقي الوحيـــد في الحسابات .. ولذلك يسمى بالباقي **residue** ويكون التكامل كالآتي:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz=2\pi i\ a_{-1}}$$

ويظهر لنا أهمية إيجاد مفكوك لورنت للدالة $f(z)$ بغض النظر عن نوع النقطة الشاذة $z = a$ .. فبعد إيجاد المفكوك يلعب الباقي $a_{-1}$ دوراً هاما ومحوريا في إيجاد قيمة التكامل $\oint_C f(z)dz$ .

فإذا كان الشذوذ من النوع القطبي فقط أي أن $z = a$ قطب من رتبة $m$ فإن مفكوك لورنت حول نقطة $z = a$ يعطى الصورة الآتية:

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{الجزء الأساسي}} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots$$

وهذا شيء أشرنا إليه سابقاً أن عدد الحدود التي تظهر في الجزء الأساسي تساوي رتبة هذا القطب. والآن بالضرب في $(z - a)^m$ فإن

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \ldots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \ldots \qquad (1)$$

وهي تمثل مفكوك تايلور للدالة التحليلية $(z - a)^m f(z)$ (لماذا؟) حول نقطة $z = a$ وبتفاضل العلاقة (1) $(m-1)$ مرة فإننا سنحصل على

$$\frac{d^{m-1}z}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!\, a_{-1} + m(m-1)\ldots 2a_0(z-a) + \ldots$$

وعند أخذ النهاية $z \to a$ فإن

$$\lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}\left((z-a)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}} = (m-1)!\, a_{-1}$$

أي أن في حالة وجود قطب عند $z = a$ من رتبة $m$ فإن

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)}$$

وهذه النتيجة توصلنا إليها سابقا في نهاية الباب الثالث (٣-٧) ولكن بأسلوب مختلف وبعيداً عن مفكوك لورنت للدالة التي لم تكن معروفة حينئذ .. (أنظر ص ١٤٦ ) ..

والآن نستطيع إيجاد $\oint_C f(z)dz$ بشكل عام ولكل أنواع نقاط الشذوذ وذلك باستخدام النظرية التالية.

**نظرية ٤-٣ نظرية الباقي**

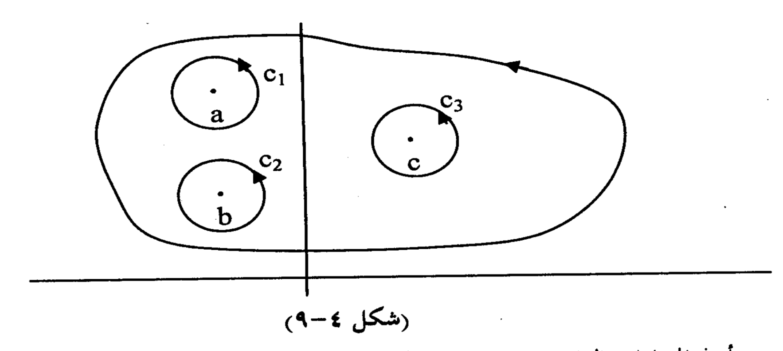
إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C باستثناء عدد محدود من النقاط وليكن ..a,b,c داخل C والتي لها البواقي ... $a_{-1},b_{-1},c_{-1},$ على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots]$$

$$=2\pi i \sum \text{residues of interior singular points}$$

**الإثبات**

بالنظر إلى شكل (٤-٩)




(شكل ٤-٩)

وبأخذ المسارات الدائرية ... $c_1,c_2$ والتي مركزها هي النقاط الشاذة كما هو موضح بالشكل فإن

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz+\oint_{C_3} f(z)dz+\ldots \qquad (1)$$

ولكن
$$\oint_{C_1} f(z)dz=2\pi i\ \ a_{-1}$$
$$\oint_{C_2} f(z)dz=2\pi i\ \ b_{-1}$$
$$\oint_{C_3} f(z)dz=2\pi i\ \ c_{-1}$$

وهكذا .. حيث .. $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1},$ هي البواقي كما قدمنا للنظرية وبالتالي فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left[a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots\right]$$
$$= 2\pi i\left[\text{sum of residues}\right].$$

**ملاحظة هامة:**

يمكن مد إثبات هذه النظرية لتطبيقها على المنحنيات العديدة الاتصال multiply-connected وكذلك على عدد لا نهائي من النقاط الشاذة المعزولة infinitely many isolated singularities والمهتم بالإثبات العام يمكنه الرجوع الي [4] .. وهى ختام جميل لأفكار هذا الكتاب.

**مثال ٤-١٦**

أوجد $\oint_C \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2\left(z^2+4\right)}dz$ حيث C يحتوي $z=-1$ وَ $z=\pm 2i$

**الحل:**

طبقا لنظرية الباقي فإن

$$\oint \frac{z^2-2z}{(z+1)^2\left(z^2+4\right)}dz = 2\pi i\left[R_1+R_2+R_3\right]$$

حيث (i) يوجد قطب من الرتبة الثانية عند $z=-1$ وبالتالي

$$R_1 = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} (z+1)^2 . \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

(ii) يوجد قطب من الرتبة الأولى عند $z = +2i$ وبالتالي

$$R_2 = \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7+i}{25}$$

(iii) يوجد قطب من الرتبة الأولى عند $z = -2i$ وبالتالي

$$R_3 = \lim_{z \to} (z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7-i}{25} = \overline{R}_2$$

وبالتالي فإن

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} dz = 2\pi i \left[ -\frac{14}{25} + \frac{7+i}{25} + \frac{7-i}{25} \right]$$

$$= 2\pi i \frac{-14+14}{25}$$

$$= 0$$

**ملاحظة:**

إذا كان المطلوب $\oint_C \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} dz$ حيث C يحتوي فقط $z = -1$

فإننا نحسب فقط $R_1$ ويكون التكامل:

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\, R_1$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-14}{25}\right)$$

$$= -\frac{28\pi i}{25}$$

وإذا كانت C تحتوي النقطتين $z = \pm 2i$ فقط فإن

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\,[R_2 + R_3]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{14}{25}\right]$$

$$= \frac{28\pi i}{25}$$

وهكذا يجب أن يلاحظ القارئ أن العبرة بالنقاط الشاذة الداخلية فقط.

**مثال ٤-١٧**

أحسب $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=1}} \sin\frac{1}{z}dz$

**الحل:**

في هذه الحالة فإن $z = 0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وهي داخل المسار $|z| = 1$ .. وبالتالي

$$\oint_C \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\,.\,R$$

ولإيجاد $R$ نقوم بحساب مفكوك لورنت للدالة $\sin\frac{1}{z}$ وقد قمنا بذلك أنفاً حيث

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}.\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\ \frac{1}{z^5}\cdots$$

وهي جزء أساسي فقط ونجد منها أن $R = a_{-1} = 1$

وبالتالي فإن

$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

**مثال ٤-١٨**

أوجد $\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz$ حيث $C$ يحتوي النقطة $z = -2$.

**الحل:**

توجد نقطة شاذة أساسية عند $z = -2$ المحتواه داخل C وبالتالي

$$\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 2\pi i\, R$$

ولإيجاد R نوجد أولا مفكوك لورنت للدالة $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ حول نقطة $z = -2$ كالآتي:

بوضع $z + 2 = u$

$$\begin{aligned}(z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (u-5)\sin\frac{1}{u}\\ &= (u-5)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\right]\\ &= \left[1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^4} - \dots\right.\\ &\qquad \left. - \frac{5}{u} + \frac{5}{3!}\frac{1}{u^3} - \frac{5}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\right]\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $R = a_{-1} = -5$

أي أن

$$\begin{aligned}\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz &= 2\pi i(-5)\\ &= -10\pi i\end{aligned}$$

لاحظ أن $\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 0$ إذا كانت z = -2 خارج C. تذكر ذلك دائما فنظرية كوشي جاهزة للتطبيق دائماً.

**مثال ٤-١٩**

أوجد $\oint_C \frac{dz}{(z+1)(z+3)}$

حيث (i) $c: |z| < 1$ (ii) $|z| > 3$

**الحل:**

بالرجوع إلى الأمثلة السابقة في حساب مفكوك لورنت فإن

(i) حالة $C: |z| < 1$ تكون الدالة $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ تحليلية ومفكوك لورنت لها (كما حصلنا عليه) هو مفكوك تايلور وبالتالي $a_{-1} = 0$ أي أن $\oint_{\substack{C\\|z|<1}} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 0$

أو بتطبيق نظرية كوشي مباشرة.

(ii) في حالة $|z| > 3$ كان مفكوك لورنت هو كالآتي:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

أي أن $a_{-1} = 0$

وبالتالي

$$\oint_{|z|>3} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 2\pi i(0)$$

$$= 0$$

**مثال ٤-٢٠**

$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}dz$ حيث C تحتوي $z = 0$.

**الحل:**

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \dots$$

وبالتالي فإن $a_{-1} = -\frac{1}{3!}$

أي أن

$$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{3}$$

**مثال ٤-٢١**

$$\oint_{C\ |z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}dz$$

**الحل:**

$\sin z = 0$ عندما تكون $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..$ وواضح أن النقاط الشاذة المحتواه داخل $|z| = \frac{3\pi}{2}$ هي $z = 0, \pm\pi$ وبالتالي يوجد ثلاثة نقاط شاذة داخل المسار ..

(i) عند $z = 0$: نعلم أن $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ وبالتالي فإن $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1$ أي أنها نقطة شاذة مزالة .. وبذلك فإن مفكوك لورنت

$$\frac{z}{\sin z}=\frac{z}{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5\ldots}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\ldots}$$

$$=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

أي أن

$$a_0-\frac{1}{3!}a_0z^2+\frac{1}{5!}z^4a_0-\ldots$$

$$+a_1z-\frac{1}{3!}a_1z^3+\frac{1}{5!}a_1z^5-\ldots$$

$$+a_2z^2-\frac{1}{3!}a_2z^4+\frac{1}{5!}a_2z^6-\ldots$$

$$=1$$

فبالمقارنة بين معاملات $z^n$ في الطرفين فإن

$$a_0=1,\quad a_1z=0\Rightarrow a_1=0\quad ,$$

$$\left(-\frac{1}{3!}a_0+a_2\right)=0\Rightarrow a_2=\frac{1}{3!}$$

وهكذا نحسب بقية المعاملات .. وبالتالي:

$$\frac{z}{\sin z}=1+\frac{1}{3!}z^2+\ldots$$

أي أن $a_{-1}=0$ وبالتالي $R_1=0$

(ii) عند $z=\pi$ .. فهذا قطب من المرتبة الأولى (لماذا؟) ..

وبالتالي

$$R_2=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\pi}(z-\pi)\cdot\frac{z}{\sin z}$$

$$=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z}=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos z}=\pi\frac{1}{\cos\pi}=-\pi$$

(iii) عند $z = -\pi$ .. وهذا أيضا قطب يسير وبالتالي:

$$R_3 = \lim_{z \to -\pi} (z+\pi)\frac{z}{\sin z} = (-\pi)\lim_{z \to -\pi} \frac{z+\pi}{\sin z}$$

$$= (-\pi)\lim_{z \to -\pi} \frac{1}{\cos z}$$

$$= (-\pi)\frac{1}{\cos(-\pi)} = \pi$$

أي أن

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin z} dz = 2\pi i[R_1 + R_2 + R_3]$$

$$= 2\pi i[0 - \pi + \pi]$$

$$= 0$$

**مثال ٤-٢٢**

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z} dz$$

**الحل:**

$z = 0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة الداخلية وبالتالي:

(i) عند $z = 0$

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{3!}z^2 + \ldots$$

$$\frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 + \left(\frac{2}{3!}\right)z^2 + \ldots$$

وبالقسمة على z:

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{1}{z} + \left(\frac{2}{3!}\right)z + \ldots$$

نلاحظ في مفكوك لورنت هنا أن $a_{-1} = 1$ (أي أن $z = 0$ قطب من رتبة يسيرة) ..

وللتأكد من ذلك فإن $\lim_{z\to 0}(z).\dfrac{z}{\sin z^2}=1\neq 0$

أي أن $z=0$ قطب فعلا من رتبة واحد.

وبالتالي فإن $R_1=1$

وبالتالي فإن

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}}\frac{z}{\sin^2 z}=2\pi i$$

**مثال ٤-٢٣**

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}}\frac{z}{\sin^2 z}dz$$

**الحل:**

في هذه الحالة فإن $z=0,\ \pm\pi$ ثلاث نقاط شاذة داخلية وبالتالي:

(i) عند $z=0$ فإن $R_1=1$ كما في المثال السابق

(ii) بالنسبة للقطبين $z=\pm\pi$ أو $z=m\pi$ حيث $m=\pm 1$ فإنه ربما يكون من الأيسر إيجاد مفكوك لورنت للدالة $\dfrac{z}{\sin^2 z}$ دعنا نضع $z-m\pi=u$ وبالتالي

$$\frac{z}{\sin^2 z}=\frac{m\pi+u}{(\sin(m\pi+u))^2}=\frac{(m\pi+u)}{\sin^2 u}$$

$$=\frac{m\pi+u}{\left(u-\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5-\dots\right)^2}$$

$$=\frac{m\pi+u}{u^2\left(1-\frac{u^2}{6}+\frac{u^4}{120}\dots\right)^2}$$

$$=\frac{m\pi+u}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{45}+\dots\right)}=\frac{a_{-2}}{(u)^2}+\frac{a_{-1}}{u}+a_0+a_1u+\dots$$

وذلك لأن $z=\pm\pi$ قطبان من الرتبة الثانية .. وبالتالي:

$$m\pi+u=\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{45}+\dots\right)\left(a_{-2}+a_{-1}u+a_0u^2+a_1u^3+\dots\right)$$

$$=a_{-2}+a_{-1}u+a_0u^2+a_1u^3+\dots$$

$$-\frac{1}{3}a_{-2}u^2-\frac{1}{3}a_{-1}u^3+\dots.$$

$$+\frac{2}{45}a_{-2}u^4-\dots$$

وبمساواة المعاملات في الطرفين فإن

$$a_{-2}=m\pi,\qquad a_{-1}=1,\qquad \left(a_0-\frac{1}{3}a_{-2}\right)=0$$

أي أن

$$a_0=\frac{1}{3}a_{-2}=\frac{1}{3}m\pi$$

أي أن

$$\frac{z}{\sin^2 z}=\frac{m\pi}{(z-m\pi)^2}+\frac{1}{(z-m\pi)}+\frac{m\pi}{3}+\dots$$

وهذا يثبت توقعنا أن $z=m\pi$ قطبان من الرتبة الثانية $(m=\pm1)$

وأن $R_{2,3}=1$ في الحالتين:

وبالتالي فإن

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}}\frac{z}{\sin^2 z}dz=2\pi i\left[R_1+R_2+R_3\right]$$

$$=6\pi i$$

**مثال ٤-٤٢**

أوجد

$$\oint_{|z|=\pi}\sec z\,dz$$

**الحل:**

نعلم أن $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$

وأن $\cos z = 0$ تعطى $z = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k = 0,\ \pm 1 \ldots$

وبالتالي فإن القطب الوحيد المحتوى داخل $|z| = \pi$ هو $z = \frac{\pi}{2}$ وهو قطب يسير .. وبالتالي:

$$R = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left( z - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{\cos z}$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z}$$

$$= -1$$ بتطبيق قاعدة لوبيتال ...

أي أن

$$\oint_{|z|=\pi} \sec z \, dz = -2\pi i$$

## تمرينات ٤

١. أوجد مفكوك لورنت للدوال الآتية حول النقطة الشاذة الموجودة بين قوسين

$$(i)\ f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \qquad (z=1)$$

$$(ii)\ f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}, \qquad (z=-2)$$

$$(iii)\ f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}, \qquad (z=0)$$

$$(iv)\ f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}, \qquad (z=-1)$$

$$(v)\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)^3}, \qquad (z=3)$$

٢. أثبت المفكوكات الآتية:

$$(i)\sin z^2=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}\dots,|z|<\infty$$

$$(ii)\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}\dots,|z|<1$$

$$(iii)\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\dots, \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(iv)\sec z=1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+\dots, \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(v)\csc z=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}\dots, \qquad |z|<\pi$$

$$(vi)\sin^{-1}z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{z^7}{7}\dots,|z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $\sin^{-1}0=0$)

$$(vii)\ \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1\times 3}{2\times 4}z^6 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}z^9 + \dots,\quad |z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $z=0$, $\sqrt{1+z^3}=1$)

٣. فك الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ والمحققة للمناطق الآتية

(i) $|z| < 1$
(ii) $1 < |z| < 2$
(iii) $|z| > 2$
(iv) $|z-1| > 1$
(v) $0 < |z-2| < 1$

٤. فك الدوال الآتية حول $z = 0$

$(i)\quad f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z}$

$(ii)\quad f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$

$(iii)\quad f(z)=\dfrac{1}{z}\cosh\dfrac{1}{z}$

$(iv)\quad f(z)=z\sinh\sqrt{z}$

٥. أثبت أن $z=\dfrac{\pi}{2}$ قطب يسير للدالة $f(z) = \tan z$ ومن ثم أوجد التكامل

$$\oint_{0<\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}} \tan z\, dz$$

٦. أوجد مفكوك $f(z)=\dfrac{1}{\ln(1+z)}$ حول $z=0$ ومن ثم أوجد

$$\oint_{\substack{C\\ 0<|z|<1}} f(z)\, dz$$

٧. أوجد مفكوك $\frac{\ln(1+z)}{1+z}$ واثبت أن 1 - = z شذوذ مزال، ومن ثم أوجد

$$\oint_{|z|<1} \frac{\ln(1+z)}{1+z}\,dz$$

٨. اثبت أن مفكوك الدالة $e^{\sin z}$ هو

$$e^{\sin z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{15} + \ldots$$

واثبت أن $\oint_C e^{\sin z}\,dz = 0$ لأي مسار مغلق في C.

٩. أوجد البواقي للدالة $f(z) = e^z \csc^2 z$

(الإجابة: $R_m = e^{m\pi}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$)

١٠. أوجد باقي الدالة $f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3}$ عند $z = 0$

مساعدة:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

(الإجابة: $-\frac{7}{45}$)

١١. أوجد التكامل $\oint_{C\;|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz$

(الإجابة: $\frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t$)

١٢. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C \\ |z|=1}} e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\, dz$

(الإجابة: $2\pi i$)

١٣. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C \\ |z|=5}} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz$

(الإجابة: $8\pi i$)

١٤. دع $C$ هو المربع المحدود بـ $x = \pm 2$ وَ $y = \pm 2$ اثبت أن

$$\oint\limits_C \frac{\sinh 3z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}\, dz = \frac{-9\pi\sqrt{2}}{2}$$

١٥. اثبت أن نظرية كوشي وصيغة تكامل كوشي هما حالتان خاصتان من نظرية الباقي.

١٦. اثبت أن $\oint\limits_{\substack{C \\ |z-1|=4}} z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz = \frac{1}{24}$

١٧. اثبت أن $\oint\limits_C \frac{\cosh z}{z^3}\, dz = \pi i$ إذا كانت C هي المربع الذي رؤوسه $(\pm 2 \pm 2i)$.

١٨. اثبت أن $\oint \frac{e^{zt}}{z\left(z^2+1\right)} = 2\pi i(1-\cos t),\ t > 0$

إذا كانت $C$ هي المربع الذي رؤوسه $(1 \pm i, -1 \pm i)$.

# الباب الخامس

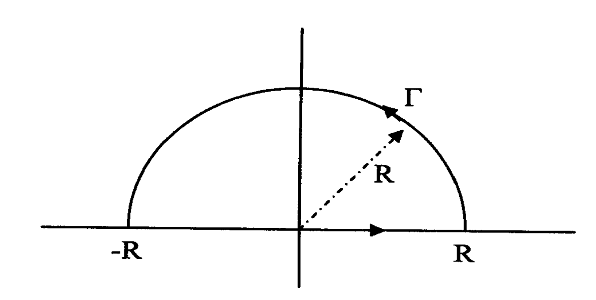
## تطبيقات في التكامل المحدود
## Applications on Definite Integrals

### ٥-١ مقدمة

من أهم التطبيقات التي يمكن أن نستفيد بها من نظرية الباقي هو حساب بعض التكاملات المحدودة .. والتي كانت تمثل صعوبة أو حتى مستحيلة الحل في R. ويتطلب التطبيق شروطاً خاصة سيتم ذكرها .. ولكن بشكل عام لا بد من تطبيق نظرية الباقي على دالة مختارة بدقة $f(z)$ وعلى مسار مغلق مختار بعناية وخبرة **Contour**.

### ٥-١-١ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ , $F(x)$ دالة نسبية **rational**

في هذه الحال احسب التكامل $\oint_C F(z)dz$ على المسار المغلق المبين في شكل (٥-١)




(شكل ٥-١)

ويتطلب الأمر بالنسبة لشكل (٥-١) حذقاً ومهارة لإيجاد التكامل على المسار $\Gamma$ عندما $R \to \infty$.

**عارض ٥-١**

إذا كانت $|F(z)| \le \dfrac{M}{R^k}$ لـ $z = Re^{i\theta}$ حيث $k > 1$ و $M$ ثابت فإن

$\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} F(z)dz = 0$ على نصف الدائرة $\Gamma$ المبينة في شكل (٥-١).

**الإثبات:**

$$\left|\int\limits_{\Gamma} F(z)dz\right| \le \int\limits_{\Gamma} |F(z)||dz|$$

$$\le \int\limits_{\Gamma} \frac{M}{R^k}\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$= \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

فإذا كانت $k > 1$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| = 0$$

وبالتالي

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

**مثال ٥-١ (مثال اختباري)**

أحسب $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

**الحل:**

من المعروف لدينا أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x\Big|_{0}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

فدعنا نختبر المسار C في شكل (٥-١) ..

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i(\sum R_i)$$

ولكن
$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

ولكن عند $z = Re^{i\theta}$ (على $\Gamma$)،
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$
$$= \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}}$$

وبالتالي فإن

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}}\right| \le \frac{1}{\left|R^2e^{2i\theta}\right|-|1|} \quad ، \ |z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2|$$
$$= \frac{1}{R^2-1}$$

ولكن $R \to \infty$ وبأخذ R كبيرة بشكل كافي

وليكن
$$\Leftarrow \frac{1}{R^2} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow R^2 > 4 \quad \Leftarrow R > 2$$
$$\frac{R^2}{R^2-1} < \frac{4}{3} \Leftarrow \frac{R^2-1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow 1-\frac{1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow -\frac{1}{R^2} > -\frac{1}{4}$$

أي أن
$$\frac{1}{R^2-1} < \frac{(4/3)}{R^2}$$

وبالتالي وطبقا لعارض (٥-١) فإن

$$|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$$

حيث $M = \frac{4}{3}$ و $k = 2 > 1$ .. وهذا معناه طبقاً للعارض أن $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

أي أن
$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dz}{1+z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left(\sum R_i\right)$$

والآن فإن $1+z^2=0$ لها جذران هما $z=\pm i$

وبالتالي عندنا قطبان يسيران عند $z=\pm i$ أحدهما داخلي والأخر خارجي فيهمل وبالتالي:
$$R=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{2z}=\frac{1}{2!}$$

وبالتالي فإن
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left[\frac{1}{2!}\right]=\pi$$

وهي نفس قيمة التكامل المحسوبة سابقاً.

والآن يمكننا إجراء تكاملات صعبة بتيسير نظرية الباقي وهذا المسار المغلق المدهش .. مثل ..
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4},\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$$

وجدير بالذكر أننا يمكننا وضع
$$\left|\frac{1}{1+z^4}\right|=\left|\frac{1}{1+R^4e^{i4\theta}}\right|\le\frac{1}{R^4-1}$$

وبأخذ
$$1-\frac{1}{R^4}>\frac{15}{16}\Leftarrow\frac{1}{R^4}<\frac{1}{16}\Leftarrow R^4>16\Leftarrow R>2$$

أي أن
$$\frac{R^4}{R^4-1}<\frac{16}{15}\Leftarrow\frac{R^4-1}{R^4}>\frac{15}{16}$$

أي أن
$$\frac{1}{R^4-1}<\frac{(16/15)}{R^4}$$

وبالتالي فإن
$$|f(z)|\le\frac{M}{R^4},k=4>1$$

أي أن
$$\lim_{0\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

وهكذا بالمثل لبقية الدوال المشابهة.

**مثال ٥-٢:**

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

**الحل:**

باستعمال نفس المسار المغلق في شكل (٥-١) .. فإن

$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2}$$
$$= 2\pi i \sum R_i$$

والآن فإنه على $\Gamma$ $(z = R\, e^{i\theta})$

$$|f(z)| = \frac{1}{\left|1+z^2\right|^2} = \frac{1}{\left|1+R^2 e^{2i\theta}\right|} \leq \frac{1}{\left(\left|R^2 e^{2i\theta}\right|-1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}$$

ولكن
$$\frac{1}{R^2-1} < \frac{4/3}{R^2}$$

إذن
$$\frac{1}{\left(R^2-1\right)^2} < \frac{16/9}{R^4} = \frac{M}{R^k}, \quad k > 1$$

وبالتالي فإن
$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} \right| = 0$$

أي أن
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = 0$$

وبالتالي فإن
$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$= 2\pi i \left[\sum R_i\right]$$

والآن عندما قطب من الرتبة الثانية عند $z = i$ وبالتالي فإن

$$R = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-1}{4i(-1)} = \frac{1}{4i}$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\pi i\left[\frac{1}{4i}\right] = \frac{\pi}{2}$$

**مثال ٥-٣:**

أوجد $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$

وهذه مسألة صعبة وليست يسيرة .. ولكن دعنا نشاهد كيف تسير الأمور بهـــذا الأســـلوب الجديد والشيق:

مقدماً فإن (لماذا؟) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$

كذلك فإنه على $\Gamma$:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^8}\right| = \frac{1}{\left|z^8+1\right|} \le \frac{1}{R^8 e^{i86} - 1}$$

$$= \frac{1}{R^8 - 1}$$

ولكن إذا كانت R كبيرة بشكل كافي مثلا $R > 2$ فإن

$$1-\frac{1}{R^8}>1-\frac{1}{2^8}\Leftarrow\frac{1}{R^8}<\frac{1}{2^8}\Leftarrow R^8>2^8$$

$$\frac{R^8}{R^8-1}<\frac{2^8}{2^8-1}\Leftarrow\frac{R^8-1}{R^8}>\frac{2^8-1}{2^8}$$

$$\frac{1}{R^8-1}<\frac{M}{R^8}=\frac{M}{R^k}\quad,\qquad k>1$$

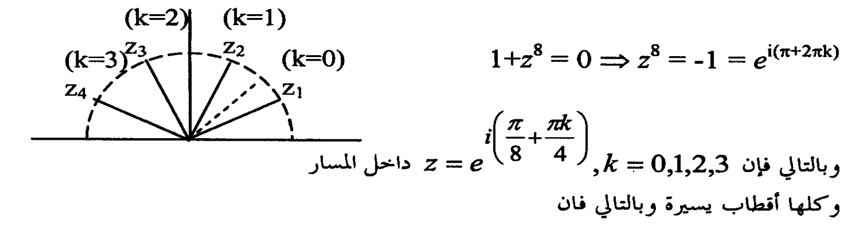
وباستخدام نتيجة العارض ٥-١ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}\right|=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}=0$$

وهذا يجعلنا مطمئنين إلى أن

$$\oint_C\frac{dz}{1+z^8}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^8}$$
$$=2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

والآن لحساب البواقي فإن




$$1+z^8=0\Rightarrow z^8=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

وبالتالي فإن $k=0,1,2,3$ , $z=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)}$ داخل المسار

وكلها أقطاب يسيرة وبالتالي فان

$$R_1=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{8}}}\frac{z-e^{i\frac{\pi}{8}}}{1+z^8}\quad,\qquad(k=0)$$
$$=\frac{1}{8e^{i7\frac{\pi}{8}}}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{7\pi}{8}-i\sin\frac{7\pi}{8}\right),\alpha=\frac{\pi}{8}$$
$$=\frac{1}{8}(\cos(\pi-\alpha)-i\sin(\pi-\alpha))=\frac{1}{8}(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

$$R_2 = \lim_{z \to e^{i\frac{3\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{3\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=1)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i\frac{21\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{5\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(\pi - 3\alpha) - i\sin(\pi - 3\alpha)\right)$$

$$R_3 = \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{5\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=2)$$

$$= \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{1}{8\,z^7} = \frac{1}{8e^{i\frac{35\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1}{8} e^{-i\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha\right)$$

وأيضا

$$R_4 = \lim_{z \to e^{i7\frac{\pi}{8}}} \frac{z - e^{i7\frac{\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=3)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i49\frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos\alpha - i\sin\alpha\right)$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i)\left[\frac{1}{8}\right][-\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos 3\alpha - i\sin 3\alpha$$

$$+ \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi i}{8}[-2i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^8} = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}}$$

ولا بد أن ننتبه فنحن نحسب البواقي للأقطاب الداخلية فقط .. ونستعمل نتيجة العارض ٥-١ بحذر ولابد أن نثبتها دائما ولا نفترض وجودها ..

**مثال ٥-٤:**

أحسب
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$$

**الحل:**

الدالة
$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

لها قطب عند $z = i$ من الرتبة الثانية داخل المسار نصف الدائري وكذلك فإن $z2 + 2z + 2 = 0$ تعطي $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ أي أن $z = -1 \pm i$ ومنهما فإن $z =$ $-1+i$ قطب يسير داخلي ويمكننا حساب البواقي كالآتي:

$$R_1 = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2(z^2+2z+2)(2z)-z^2\left[(z+i)^2(2z+2)+(z^2+2z+2)^2(z+i)\right]}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}$$

$$=\frac{(2i)^2(1+2i)(2i)+\left[(2i)^2 2(i+1)+(1+2i)2(2i)\right]}{(2i)^4(1+2i)^2}$$

$$=\frac{-8i(1+2i)-8(i+1)+4i(1+2i)}{16(1+4i-4)}$$

$$=\frac{-12i}{16(-3+4i)}\cdot\frac{-3-4i}{-3-4i}=\frac{12i(3+4i)}{16(9+16)}=\frac{1}{100}(-12+9i)$$

$$R_2=\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)(z+1+i)}$$

$$=\frac{(-1+i)^2}{\left[(-1+i)^2+1\right]^2[-1+i+1+i]}$$

$$=\frac{(-2i)}{(-2i+1)^2(2i)}$$

$$=\frac{-1}{1-4i-4}$$

$$=\frac{-1}{-3-4i}$$

$$=.\frac{1}{3+4i}.\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$=\frac{3-4i}{9+16}$$

$$=\frac{3-4i}{25}$$

والآن فإنه علي $\Gamma$:

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right|$$

$$= \frac{|z|^2}{|z^2+1|^2 |(z+1-i)||(z+1+i)|}$$

$$= \frac{|R^2 e^{2i\theta}|}{|R^2 e^{2i\theta}+1|^2 |R\,e^{i\theta}+(1-i)||R\,e^{i\theta}+(1+i)|}$$

$$\leq \frac{R^2}{(R^2-1)^2 (R-|1-i|)(R+|1+i|)}$$

$$= \frac{R^2}{(R^2-1)^2 (R-2)(R+2)}$$

$$= \frac{R^2}{(R^2-1)^2}\cdot\frac{1}{R^2-4} = \frac{R^4}{(R^2-1)^2}\cdot\frac{R^2}{R^2-4}\cdot\frac{1}{R^2}$$

بأخذ $R > 3$ مثلاً فإن $R^2 > 9$

أي أن (1) $\quad \frac{1}{R^2} < \frac{1}{9}$

أي أن $1 - \frac{1}{R^2} > \frac{8}{9}$ أي أن $\frac{R^2-1}{R^2} > \frac{8}{9}$ أي أن

$\frac{R^2}{R^2-1} < \frac{9}{8}$ وبالتربيع فإن

(2) $\quad \frac{R^4}{(R^2-1)^2} < \frac{81}{64}$

كذلك فإن من العلاقة $\frac{1}{R^2} < \frac{1}{9}$ .. أي أن

$\frac{4}{R^2} < \frac{4}{9}$ وبالتالي فإن $1 - \frac{4}{R^2} > \frac{5}{9}$

أي أن $\frac{R^2 - 4}{R^2} > \frac{5}{9}$ .. أي أن $\frac{R^2}{R^2 - 4} < \frac{9}{5}$ .. أي أن

$$\frac{1}{R^2 - 4} < \frac{9/5}{R^2} \qquad (3)$$

من (1), (2), (3) فإن

$$|f(z)| \le \frac{81}{64} \cdot \frac{9/5}{R^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{M}{R^k}, \qquad k > 1$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = 0$$

أي أن

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

وبالتالي فإن

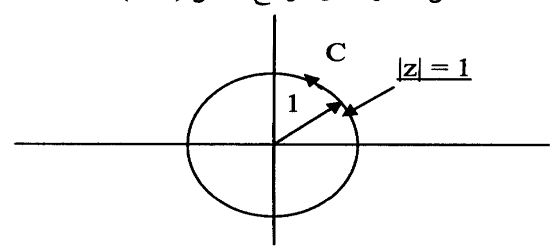
$$\begin{aligned}
\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i [R_1 + R_2] \\
&= 2\pi i \left[ \frac{1}{100}(-12 + 9i) + \frac{1}{25}(3 - 4i) \right] \\
&= 2\pi i \left[ \frac{-12}{100} + \frac{9i}{100} + \frac{12}{100} - \frac{16i}{100} \right] = 2\pi i \left( -\frac{7i}{100} \right) \\
&= \frac{7\pi}{50}.
\end{aligned}$$

وأرجو ملاحظة الصعوبة والدقة التي نثبت فيها أن التكامل على $\Gamma$ مساوياً للصفر .. ونعلم أن

$R\to\infty$ ونأخذ القيمة المناسبة $R>l$ التي تناسب المسألة .. وللعلم فإن $R > 2$ لا تناسب هذه المسألة (لماذا؟).

**<u>٥-١-٢ تكاملات على صورة $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ حيث $G(\ )$ دالة نسبية في $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.</u>**

في هذه الحالة نستعمل المسار المغلق الموضع بشكل (٥-٢)




**(شكل ٥-٢)**

وبالتالي فإن $z = e^{i\theta}$ وتكون $\sin\theta = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ وكـذلك $\cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$ وأيـضا

$dz = i\,z\,d\theta$

وبالتالي نحسب التكامل $\oint_C F(z)\,dz$ بنظرية الباقي.

**<u>مثال ٥-٥:</u>**

أحسب $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

**<u>الحل:</u>**

كلنا نعلم التعويضات المشهورة لأمثال هذا التكامل .. ودعنا نرى كيف تسير الأمور باستعمال نظرية الباقي .. باستعمال المسار الدائري $|z| = 1$ .. فإن

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad , \quad \sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = \frac{2idz}{4i + z - \frac{1}{z}} \frac{1}{iz}$$

$$= \frac{2dz.z}{z^2 + 4iz - 1} . \frac{1}{z}$$

$$= 2\frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

ولكن $z^2 + 4iz - 1 = 0$ تعطي الجذرين $z = \left(-2 \pm \sqrt{3}\right)i$ والعبرة بالذي داخل المسار وهو $z = \left(-2+\sqrt{3}\right)i$ حيث $\left|-2+\sqrt{3}\right| < 1$ وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \oint_{\substack{C \\ |z|=1}} \frac{2dz}{\left(z^2 + 4iz - 1\right)}$$

$$= 2\pi i(R)$$

حيث

$$R = \lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i} \frac{\left(z - \left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)2}{\left(z - \left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)\ \left(z - \left(-2-\sqrt{3}\right)i\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i + \left(2+\sqrt{3}\right)i}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}\, i}$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\pi i \frac{2}{2\sqrt{3}\,i}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

وعلى القارئ أن يعلم أن التكامل

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad a > |b|.$$

ويمكنه محاولة إثبات ذلك بشكل عام .. ونلاحظ فشلنا في إيجاد التكامل في حالة $a = |b|$ بهذه الطريقة (لماذا؟).

**مثال ٥-٦**

أثبت أن
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$$
إذا كان $a^2 > b^2 + c^2$

**الحل:**

بأخذ المسار المغلق $c: |z| = 1$ فإنه على $c$ يكون

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{dz/iz}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{c}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \frac{(dz)2i}{iz\left(2ai+bi\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c\frac{(z^2-1)}{z}\right)}$$

$$= \frac{2dz.z}{z\left((bi+c)z^2+2aiz+(bi-c)\right)}$$

$$= \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

ولكن جذور المعادلة $(c+bi)z^2 + 2aiz + (-c + bi) = 0$ هي

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 - 4((c+bi)(-c+bi))}}{2(c+bi)}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{-a^2 + c^2 + b^2}}{(c+bi)} \cdot \frac{c-bi}{c-bi}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}\,i}{c^2+b^2}(c-bi), \quad a^2 > c^2 + b^2$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}{c^2+b^2}(b+ci)$$

بالتالي فعندنا قطبان عند

$$z_1 = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}{c^2+b^2}\right)(b+ci)$$

وَ

$$z_2 = \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}{c^2+b^2}\right)(b+ci)$$

ولكن

$$|z_1| = \frac{\left|a - \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}\right|}{c^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}$$

$$= \left|\frac{a - \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}{\sqrt{c^2+b^2}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}{a + \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}}\right|$$

$$= \left|\frac{a^2 - (a^2 - (c^2+b^2))}{\left(\sqrt{c^2+b^2}\right)\left(a + \sqrt{a^2 - (c^2+b^2)}\right)}\right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{c^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2-(c^2+b^2)}} \right|$$

$$< 1$$ طالما أن $a^2 > c^2 + b^2$

وبالتالي فإن $z_1$ قطب داخلي **interior pole** ولكن $z_2$ خارجي (لماذا؟).

وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \oint_{\substack{C\\|z|=1}} \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= 2\pi i R$$

$$R = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\cdot\frac{2}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{2}{2(c+bi)z+2ai}$$ (بتطبيق قاعدة لوبيتال)

$$= \frac{2}{2(c+bi)z_1+2ai}$$

$$= \frac{2}{2(c+bi)\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}}{c^2+b^2}\right)i(c-bi)+2ai}$$

$$= \frac{1}{i\left(\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}}{c^2+b^2}\right)(c^2+b^2)+a\right)}$$

وبالتالي فإن

$$R = \frac{-i}{\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

بشرط أن $a^2 > (b^2 + c^2)$

### ٥-١-٣ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \begin{matrix} \cos mx \\ or \\ \sin mx \end{matrix} \right) . F(x)dx$ حيث $F(x)$ دالة نسبية

في هذه الحالة نأخذ المسار $c$ الذي في شكل (٥-١) ونكامل الدالة $F(z)e^{imz}dz$ على $c$. وننتظر طبعاً مشكلة التكامل على $\Gamma$ .. والعارض القادم يواجه هذه المشكلة.

**عارض ٥-٢**

إذا كانت $k > 0$ , $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$ على $z = R\,e^{i\theta}$, $M$ ثابت فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)e^{imz}dz = 0$$

**الإثبات:**

على $\Gamma$ فإن $z = R\,e^{i\theta}$ وبالتالي

$$\int_\Gamma e^{imz}F(z)dz = \int_0^\pi e^{im\,\mathrm{Re}^{i\theta}} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta$$

وبالتالي

$$\left|\int_0^\pi e^{im\,\mathrm{Re}^{i\theta}} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta\right| \le \int_0^\pi \left|e^{im\,\mathrm{Re}^{i\theta}}\right| \left|F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| \left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\le \frac{M}{R^k} \int_0^\pi \left|e^{imR\,(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| Rd\,\theta$$

$$= \frac{M}{R^k} \int_0^\pi \underbrace{\left|e^{imR\cos\theta}\right|}_{1} \left|e^{-mR\sin\theta}\right| Rd\theta$$

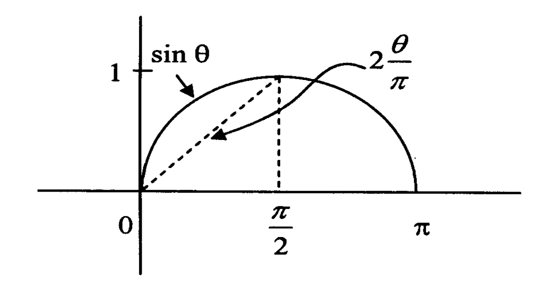
$$= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

وذلك لأن $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ متماثلة حول $\frac{\pi}{2}$.

وبالنظر للشكل (٥-٣) فإن

$$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \qquad , \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$




**شكل (٥-٣)**

وبالتالي فإن

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta \le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\left(2\frac{\theta}{\pi}\right)} d\theta$$

(لماذا؟)

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \frac{-\pi}{2mR} e^{-2mR\frac{\theta}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-M\pi}{mR^k}\left(e^{-mR} - 1\right)$$

$$= \frac{M\pi\left(1 - e^{-mR}\right)}{mR^k}$$

والآن عندما $R \to \infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz \right| = 0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz = 0$$

لاحظ أنه للاستفادة من العارض ٥-٢ فلابد من إثبات أن $k > 0$ , $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$ على $\Gamma$.

**مثال ٥-٧**

أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}$

**الإثبات**

لإيجاد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx$ .. نلاحظ أن $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ تم التعامـــل معهـــا سابقاً في مثال (٥-١) .. وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} F(z)e^{imz}\,dz = 0$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\oint_{C}\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz$$
$$= 2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

ويوجد قطبان للدالة F(z) عند z = +i وعند z = -i والعبرة بالأول فقط (لماذا؟) ..

وبالتالي فإن

$$R = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}$$
$$= \frac{e^{-m}}{2i}$$

وبالتالي

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{imx}}{1+x^2}dx + \underbrace{\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz}_{0} = \frac{e^{-m}}{2i}(2\pi i)$$

وبأخذ R⟶∞ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-m}$$

وبالتالي نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-m}$$

وأيضاً:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx = 0$$

**مثال ٥-٨**

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx$

**الحل**

بأخذ المسار المغلق النصف دائرى (شكل ٥-١) .. فإننا نحسب التكامل

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$$

ولكن $z^2+2z+5=0$ لها الجذران

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

وتعتبر فقط القطب الداخلي $z = -1+2i$ وبالتالي فإن

$$R=\lim_{z\to -1+2i}(z+1-2i)\frac{ze^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{(4i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}e^{-i\pi}}{4i}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}(\cos\pi-i\sin\pi)}{4i}$$

$$=\frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=2\pi i\ \frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}(1-2i)$$

ولكن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = \int_{-R}^{R} \frac{x\,e^{i\pi x}}{x^2+2x+5} + \int_\Gamma \frac{ze^{imz}}{z^2+2z+5}dz$$

ولكن على $\Gamma$

$$F(z) = \frac{z}{z^2+2z+5} = \frac{\mathrm{Re}^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+2\,\mathrm{Re}^{i\theta}+5} = \frac{\mathrm{Re}^{i\theta}}{\left(\mathrm{Re}^{i\theta}+1-2i\right)\left(\mathrm{Re}^{i\theta}+1+2i\right)}$$

وبالتالي فإن

$$|F(z)| = \frac{R}{\left|\mathrm{Re}^{i\theta}+(1-2i)\right|\left|\mathrm{Re}^{i\theta}+(1+2i)\right|} \le \frac{R}{\left(R-|1-2i|\right)\left(R-|1+2i|\right)}$$

$$= \frac{R}{\left(R-\sqrt{5}\right)\left(R-\sqrt{5}\right)} = \frac{R}{R-\sqrt{5}} \cdot \frac{R}{R-\sqrt{5}}$$

الآن بأخذ $R > 6$ فإن $\frac{1}{R} < \frac{1}{6}$ وكذلك $\frac{\sqrt{5}}{R} < \frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن

$$-\frac{\sqrt{5}}{R} > -\frac{\sqrt{5}}{6}$$

وبالتالي $1-\frac{\sqrt{5}}{R} > 1-\frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن $1-\frac{\sqrt{5}}{R} > 1-\frac{\sqrt{5}}{6} = d$ أي أن

$\frac{R-\sqrt{5}}{R} > \frac{1}{d}$ وبالتالي $\frac{R}{R-\sqrt{5}} < \frac{1}{d}$

وبالتالي فإن

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma} = \frac{R}{R-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{R-\sqrt{5}} < \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{dR} = \frac{1/d^2}{R} = \frac{M}{R^k},\ k > 0$$

وبالتالي فعندما $R \to \infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{ze^{imz}}{z^2+2z+5}\,dz = 0$$

تبعاً لعارض (٥-٢). وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}$$

وأيضا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5}\,dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

**ملاحظة:**

نلاحظ أنه لو أخذنا

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma} = \frac{R}{\left(R-\sqrt{5}\right)^2} = \left(\frac{R}{R-\sqrt{5}}\right)^2 \frac{1}{R}$$

$$< \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{6}$$

ولفشلنا في إثبات أن $\left|F(z)\right|_{\Gamma} < \frac{M}{R^k},\quad k > 0$..

ولكننا قمنا بتصرف أخر سليم أيضا وهو

$$
\begin{aligned}
|F(z)|_\Gamma &= \frac{R}{R-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{R-\sqrt{5}} < \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{dR} \\
&= \frac{1/d^2}{R} \\
&= \frac{M}{R}, \qquad k = 1 > 0
\end{aligned}
$$

ولا يجب افتراض انعدام التكامل على $\Gamma$.

## ٥-١-٤ تكاملات ومسارات مغلقة مشهورة

**مثال ٥-٩**

أوجد تكامل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

**الحل:**

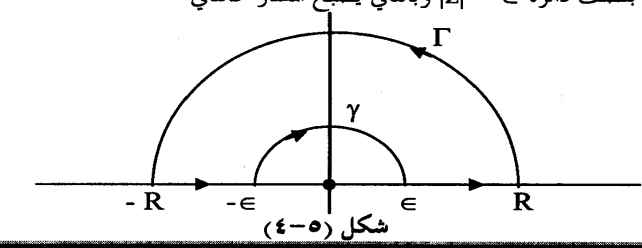
لاحظ أن المسار لانهائي وأن $\frac{\sin x}{x}$ دالة زوجية وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

أي أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

وبالتالي فالمسار النصف دائري يصلح لذلك ولكن هناك مشكلة تواجه تطبيق هذا المسار وهو أن النقطة الشاذة (المزالة) $z = 0$ تقع على المسار الحقيقي من $-R$ إلى $R$ .. لذلك يتم عزل هذه النقطة بنصف دائرة $|z| = \epsilon$ وبالتالي يصبح المسار كالتالي




شكل (٥-٤)

**وبالتالي فإن** $\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ لأن z = 0 نقطة خارج المسار المغلق C.

وبالتالي

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

ولكن

$$\left.\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x}dx\right|_{x\to -x} = +\int_{R}^{\in} \frac{e^{-ix}}{x}dx = -\int_{\in}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}dx$$

وبالتالي فإن

$$\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

أي أن

$$2i\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{1}{x}dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

أي أن

$$2i\int_{\in}^{R} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \qquad (1)$$

ولكن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

لأن

$$|F(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R}$$

والآن على نصف الدائرة الصغرى $|z| = \in$ .. أي أن $z = \in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}} \in ie^{i\theta}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in \to 0$ فإن

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\in\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{1}id\theta$$

$$=i\int_{\pi}^{0}(1)d\theta$$

$$=i(0-\pi)$$

$$=-i\pi$$

وبالتالي نحصل على (بالتعويض في (١) وأخذ $\in\to 0$ وَ $R\to\infty$)

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i+0=0$$

أي أن

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

**ملاحظة:**

هذا المثال المشهور يعطينا فكرة عن كيفية التصرف إذا وجدت نقاط شاذة على المحور الحقيقي .. فنقوم بعزلها بأنصاف دوائر ثم نحاول إيجاد قيمة التكامل على هذه المسارات الفرعية ونأخذ النهاية عندما تؤول أنصاف الأقطار إلى الصفر.

**مثال ٥-١٠**

أثبت أن

$$\int_{0}^{\infty}\frac{(\ln u)}{1+u^2}du=\frac{\pi^3}{8}$$

**الإثبات:** باعتبار التكامل

$$\oint_{C}\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz$$

حيث c هو نفسه المسار السابق في مثال (٥-١٠) وبالتالي يتم عزل النقطة الشاذة $z=0$ (لماذا؟) .. ونلاحظ هنا أنه يوجد قطب داخلي عند $z=i$.

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = 2\pi i R\ ,$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{(\ln z)^2}{(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{1}{2i}(\ln i)^2 \\ &= \frac{1}{2i}\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad \text{(لماذا؟)} \\ &= -\frac{\pi^2}{8i} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz &= 2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{8i}\right) \\ &= \frac{-\pi^3}{4} \end{aligned}$$

والآن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2}\,du + \int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2}\,du + \int_\Gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \frac{-\pi^3}{4}$$

والآن على $\gamma$:

$$\int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \int_\pi^0 \frac{\left(\ln \epsilon e^{i\theta}\right)^2}{1+\epsilon^2 e^{2i\theta}}\,\epsilon i e^{i\theta}\,d\theta$$

وبأخذ $\epsilon \to 0$ فإن:

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\in e^{i\theta}\cdot\left(\ln\in e^{i\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{e^{i\theta}\left(\ln\in e^{i\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\in}\right)}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{e^{i\theta}2\ln\left(\in e^{i\theta}\right)\cdot\frac{1}{e^{i\theta}\in}\cdot e^{i\theta}}{-\frac{1}{\in^2}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}\ln\left(\in e^{i\theta}\right)}{-\frac{1}{\in}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}\frac{1}{\in e^{i\theta}}\cdot e^{i\theta}}{\frac{1}{\in^2}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}}{1}(\in)d\theta$$

$$= 0$$

وبجعل $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{\left(\ln \mathrm{Re}^{i\theta}\right)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right|$$

$$\le \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{|\ln R+i\theta|^2}{\left|1+R^2e^{2i\theta}\right|}R\,d\theta$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{(\ln R)^2 + \theta^2}{R^2 - 1} R\, d\theta, \qquad |z_2 + z_1| \geq |z_2| - |z_1|$$

ولكن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2 - 1} = 0$$

وكذلك

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R(\ln R)^2}{R^2 - 1} = \lim_{R\to\infty} \frac{R2(\ln R)\cdot\frac{1}{R} + (\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{(\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R\cdot\frac{1}{R}}{2}$$

$$= 0 + \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R}$$

$$= 0 + 0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left( \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{(\ln v)^2}{1+v^2} dv + \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4} \qquad (2)$$

والآن بوضع $v = -u$ في التكامل الأول.

وبالتالي فإن

$$\ln v = \ln(-u) = \ln u + \ln(-1)$$

(لماذا؟)

$$= \ln u + \pi i$$

وبالتالي فإن (2) تصبح

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left( -\int_{R}^{\epsilon} \frac{(\ln u + \pi i)^2}{1+u^2} du + \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{\epsilon}^{R}\frac{\left((\ln u)^2+2\pi i\ln u-\pi^2\right)}{1+u^2}du+\int_{\epsilon}^{R}\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du\right)=-\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتالي فإن

$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du-\pi^2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}$$

ولكن

$$\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

أي أن

$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi^3}{2}=\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتالي نحصل على

$$\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du=\frac{\pi^3}{8}$$

وجانبيا أيضا فإن

$$\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=0$$

**مثال ٥-١١**

أحسب
$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

**الحل:**

بأخذ المسار نفسه في شكل ٥-٤ .. مع ملاحظة أن هناك قطب يسير داخل المسار عند $z=ia$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = 2\pi i R$$

حيث

$$R = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{z(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{e^{-a}}{ai(2ai)} = \frac{-1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{\pi\, i\, e^{-a}}{a^2} \qquad (1)$$

والآن فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

$$+\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

وبوضع $x = -u$ في التكامل الأول في الطرف الأيمن فإن:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du = -\int_\epsilon^R \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

$$= 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

وبالتالي فإن

$$2i\int_{\in}^{R}\frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx+\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=-\frac{\pi i e^{-a}}{a^2}\qquad(2)$$

والآن .. بالتكامل على $\gamma$ : $z=\in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}\left(\in^2 e^{2i\theta}+a^2\right)}i\in e^{i\theta}d\theta$$

وبأخذ النهاية $\in\to 0$ فإن:

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=i\int_{\pi}^{0}\frac{1}{a^2}d\theta$$

$$=-\frac{\pi i}{a^2}\qquad(3)$$

كذلك على $\Gamma$: $z=R\,e^{i\theta}$

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma}=\left|\frac{1}{R\left(R^2e^{2i\theta}+a^2\right)}\right|\le\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\left(R^2-a^2\right)}$$

ولكن بأخذ $R>\sqrt{a^2+1}$ فإن $\frac{1}{R}<\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ وبالتالي $\frac{a^2}{R^2}<\frac{a^2}{1+a^2}$

أي أن $$1-\frac{a^2}{R^2}>1-\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{1}{1+a^2}$$

أي أن $$\frac{R^2-a^2}{R^2}>\frac{1}{1+a^2}$$

وبالتالي فإن $$\frac{R^2}{R^2-a^2}<1+a^2$$

أي أن $$\frac{1}{R^2-a^2}<\frac{1+a^2}{R^2}$$

أي أن

$$|F(z)|_{\Gamma} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a2}} \cdot \frac{1+a^2}{R^2} = \frac{M}{R^k} \quad , \quad k > 0$$

فإنه بتطبيق نتيجة العارض ٥–٢ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz = 0$$

وبالتالي (2) تصبح ($\in\to 0$ وَ $R\to\infty$):

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx - \frac{\pi i}{a^2} + 0 = \frac{-\pi i e^{-a}}{a^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\pi e^{-a}}{2a^2}$$

$$= \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

أي أن

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)}$$

**ملاحظة هامة**

لا نستطيع حساب $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x\left(x^2+u^2\right)} dx$ بهذا الأسلوب. (لماذا؟!).

**مثال ٥–١٢**

أثبت أن $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \frac{k\pi}{2}$

**الحل**

باستخدام $\sin^2 kx = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2kx\right)$

وباستخدام الدالة $1 - e^{2kiz}$ فإن صورة التكامل تصبح كالآتي:

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$

وباستخدام المسار المغلق نصف الدائري في شكل (٥-٤) فإن

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = 0$$

(لماذا؟)

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=0 \qquad (1)$$

وبوضع $x = -u$ في التكامل الأول فإن

$$\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{R}^{\epsilon} \frac{1-e^{-2kiu}}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{1-(\cos 2ku - i\sin 2ku)}{u^2}du$$

$$=\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin^2 ku}{u^2}du + \frac{i}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin 2ku}{u^2}du \qquad (2)$$

كذلك فإن التكامل الثالث:

$$\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{1-(\cos 2kx + i\sin 2kx)}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{1-\cos 2kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin 2kx}{x^2}dx$$

$$=\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin 2kx}{x^2}dx \qquad (3)$$

وكذلك فإن التكامل على $\gamma$: $z = \in e^{i\theta}$ يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} \frac{1-e^{2ki\in e^{i\theta}}}{\in^2 e^{2i\theta}} \in ie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} \frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in \to 0$ فإن

$$\frac{1}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{i}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\in}^{0} \frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to 0}\frac{-e^{2kie^{i\theta}\in}(2ki)e^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

$$= +\frac{1}{2}(2k)\int_{\pi}^{0} d\theta = -\pi k \qquad (4)$$

وكذلك فإن التكامل على $\Gamma$: يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{2ki\mathrm{Re}^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}} i\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{2kiR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cdot e^{i(2kR\cos\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}(\cos(2kR\cos\theta)+i\sin(2kR\cos\theta))}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\sin(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$+\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cos(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما R→∞ وبمعلومية أن $\lim_{R\to\infty} \sin R(-) = l_1$ وأن

$\lim_{R\to\infty} \cos R(-) = l_2$ حيث $l_2, l_1$ كميات محدودة بين 1- وَ 1 فإن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = 0 \qquad (5)$$

وباستعمال النتائج في (2), (3), (4), (5) فإن (1) تصبح بعد جعل 0→∈ وَ R→∞:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2}dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx - \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2}dx \; -\pi\, k + 0 = 0$$

أي أن
$$2\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx = \pi\, k$$

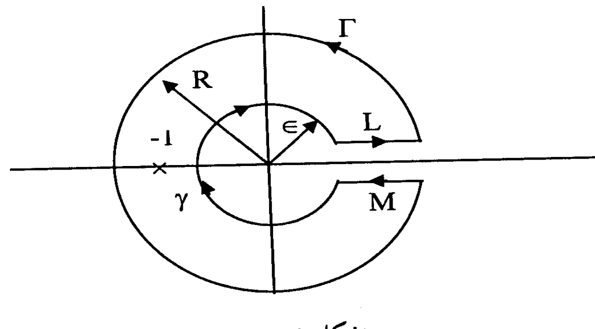
أي أن
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx = \pi\frac{k}{2}}$$

**مثال ٥-١٣**

أثبت أن
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad , \quad 0 < p < 1$$

**الإثبات:**

نلاحظ أننا نملك نقطتان شاذتان .. الأولى عند z = 0 وهي نقطة تفرع والأخرى عند z = -1 وهي قطب يسير. ولذلك نقوم باستعمال المسار المغلق الموضح بشكل (٥-٤)




(شكل ٥-٥)

ونعتبر التكامل $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = 2\pi i R$

حيث $R = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{(z+1)} = (-1)^{p-1} = e^{i\pi(p-1)}$

وبالتالي فإن $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i) \qquad (1)$

ولكن

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\Gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$$

$$+\int_\gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i) \qquad (2)$$

مع ملاحظة أن L, M ينطبقان على محور x عند أخذ النهاية $\in\to 0$ .. فإن

$$\int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\in^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx, \qquad z = xe^{i0}$$

$$\int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_R^\in \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx, \qquad z = xe^{i2\pi}$$

والآن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=\lim_{R\to\infty} i\int_{0}^{2\pi}\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^{p-1}}{R\,e^{i\theta}+1}R\,e^{i\theta}d\theta$$

ولكن

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}\,e^{ip\theta}}{R\,e^{i\theta}+1}d\theta\right|\le\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}}{\left|R\,e^{i\theta}+1\right|}d\theta$$

$$\le\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}}{R-1}d\theta$$

$$=\frac{2\pi R^{p}}{R-1}=\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}$$

وبالتالي فإنه عند أخذ النهاية $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz\right|\le\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}=0$$ (لماذا؟)

أي أن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=0$$

والآن بالنسبة للتكامل على $z=\in e^{i\theta}$ فإن

وبالتالي فإن

$$\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz=i\int_{0}^{2\pi}\frac{\left(\in e^{i\theta}\right)^{p-1}\in e^{i\theta}d\theta}{1+\in e^{i\theta}}$$

ولكن

$$\left|\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right|\le\int_{0}^{2\pi}\frac{(\in)^{p}}{\left|1+\in e^{i\theta}\right|}d\theta$$

$$\le\int_{0}^{2\pi}\frac{(\in)^{p}}{\in-1}d\theta$$

$$=\frac{\in^{p}}{\in-1}(2\pi)$$

وبأخذ النهاية $\in\to 0$ فإن

$$\lim_{\in\to 0}\left|\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right|=0$$

أي أن

$$\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz=0$$

وبالتالي بأخذ $\in\to 0$ وَ $R\to\infty$ للعلاقة (2) فإن:

$$\int_{\infty}^{0}\frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx-\int_{\infty}^{0}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\left(e^{i\pi(p-1)}\right)$$

وبوضع $e^{2\pi i}=1$ في مقام التكامل الأول فإن:

$$e^{2\pi i(p-1)}\int_{\infty}^{0}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(p-1)\pi i}$$

أي أن

$$\left(1-e^{2\pi(p-1)i}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(p-1)\pi i}$$

إذن في النهاية فإن تكاملنا يساوي الآتي:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx&=\frac{2\pi i e^{p\pi i}e^{-\pi i}}{1-e^{2\pi ip}e^{-2\pi i}}\\&=\frac{2\pi i e^{p\pi i}(-1)}{1-e^{2\pi pi}}\\&=\pi\frac{e^{p\pi i}}{\left(e^{2\pi pi}-1\right)/2i}\\&=\pi\frac{1}{\left(e^{\pi pi}-e^{-\pi pi}\right)/2i}\\&=\frac{\pi}{\sin\pi p}\end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}=\frac{\pi}{\sin p\pi},\qquad 0<p<1}$$

## تمرينات ٥

١. أوجد التكامل $\oint_C f(z)dz$ إذا كانت C هي المسار المغلق النصف دائري (شكل ٥-١) .. وكانت f(z):

$$(i)\ f(z)=\frac{1}{z^2+a^2},\ a\in\Re \qquad (ii)\ f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2},\ a\in\Re$$

$$(iii)\ f(z)=\frac{1}{z^4+1} \qquad (iv)\ f(z)=\frac{1}{z^4+a^4},\ a\in\Re$$

$$(v)\ f(z)=\frac{1}{z^6+1} \qquad (vi)\ f(z)=\frac{z^2}{z^8+1}$$

$$(vii)\ f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)} \qquad (viii)\ f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

٢. ومن ثم أوجد التكاملات الآتية:

$$(i)\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad (ii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$(iii)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \qquad (iv)\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4}$$

$$(v)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \qquad (vi)\int_0^\infty \frac{x^2}{x^8+1}$$

$$(vii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)} \qquad (viii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

٣. أوجد التكامل $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ الإجابة ($\pi$).

٤. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$

٥. اثبت أن
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$$

٦. اثبت أن
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

٧. اثبت أن
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}, \quad m>0$$

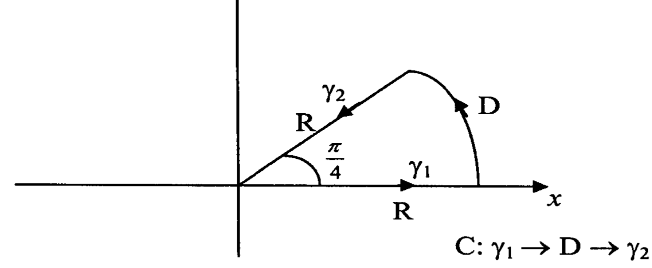
٨. احسب
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\left(1+x^2\right)^5} dx$$

٩. اثبت أن
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \pi\frac{\sqrt{3}}{6}$$

١٠. اثبت أن
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

١١. اثبت أن
$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

خذ C المسار المغلق الموضح بشكل (٥-٥) .. وكامل $\oint_C e^{iz^2} dz$




(شكل ٥-٥)

١٢. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi \ln 2$

(كامل $\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz$ وخذ C هو المسار المغلق النصف دائري).

١٣. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{2a}$

١٤. اثبت أن

$$(i)\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

$$(ii)\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^4+1}dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$$

١٥. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2$

١٦. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{2}$

١٧. اثبت أن $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{2\pi}{1-r}, \quad 0 \le r < 1$

١٨. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad m > 0$

١٩. اثبت أن $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$

٢٠. اثبت أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3} e^{-m}(1+ma)$$

٢١. اثبت أن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad a>|b|>0$$

ملحق أ

# الأعداد المركبة
# Complex Numbers

**مقدمة:**

عرف علماء الرياضيات خط الأعداد في مجموعة الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}$ تعريفاً محكماً .. هذه المجموعة كانت تفي بالغرض حينما يُطلب مجموعة الحل لمعادلات رياضية مثل $(x^2 - 9 = 0)$ أو $(x^2 - 2x + 1 = 0)$ وغيرها .. وكذلك حينما يطلب مجموعة الحل لمتباينات (متراجحات) من أمثال $(x + 1 > 0)$ وغيرها. ولكن كيف نستطيع إيجاد مجموعة الحل لمعادلة مثل $(x^2 + 1 = 0)$؟ .. إن مجموع المربعات لا يساوي صفراً لأن مربع العدد (دائماً) موجب، فكيف يمكن لمجموع أعداد مربعة أن يكون صفراً أو سالباً؟.

للإجابة على هذا السؤال افترض العلماء وجود ما يسمى بالعدد التخيلي Imaginary number وهو العدد المعرف كالآتي:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

فهذا التعريف يمكننا من حل المعادلة $(x^2 + 1 = 0)$ إذ أن:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

ولكن إلى أي مجموعة تنتمي مجموعة الحلول؟ .. فكان لابد من توسيع Extending مجموعة الأعداد الحقيقية لتستوعب الوافد الجديد، ولذلك تم تعريف العدد المركب Complex Number ليكون مكوناً بصورة عامة من جزء حقيقي Real Part وجزء تخيلي Imaginary Part كالآتي:

$$\boxed{z = a + ib}$$

حيث $a, b \in \boldsymbol{R}$ و $i = \sqrt{-1}$ . هذه المجموعة الموسعة التي تحتوي أمثال هذه الأعداد

سُميت بمجموعة الأعداد المركبة $\boldsymbol{Z}$ وبالتالي $z = a + ib$ يحقق $z \in \boldsymbol{Z}$. كذلك $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{Z}$، أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من $\boldsymbol{Z}$ وذلك لأنه عندما نضع $b = 0$ فإن $z \in \boldsymbol{R}$.

بداية من هذا التفكير المبدع، والذي يبدو الآن يسير، تطور علم من العلوم الهامة جداً والتي هي بدورها تسببت في تطوير الرياضيات وتوسيع طرق الحل للمعادلات .. بل إنها أصبحت من العلوم القيمة جداً والتي لا غنى عنها في العلوم الكهربية وعلوم الاتصالات وعلم الموائع وعلم الديناميكا .. وذلك لأن هذه المقدمة اليسيرة التي أنتجت ما يُسمى بالعدد المركب تطورت هي الأخرى لتنتج علماً فائقاً ومدهشاً آخر يسمى بالمتغير المركب Complex Variable وهو من العلوم البديعة المدهشة والتي لها أيادي بيضاء كثيرة على تطور الرياضيات ككل.

**تعريفات:**

**تعريف – ١:**

**العدد المركب z هـــو عدد ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة $\boldsymbol{Z}$ بحيث يكون $z = a + ib$ لكل $a, b \in \boldsymbol{R}$، $i = \sqrt{-1}$.**

**ملحوظة:**

بما أن $i = \sqrt{-1}$، فإن

$$\begin{aligned} i^2 &= i \times i = -1 \\ i^3 &= i^2 \times i = -1 \times i = -i \\ i^4 &= i^2 \times i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 \times i = i \\ &\vdots \end{aligned}$$

وهكذا. وتؤدي عمليات الرفع لأس موجب على $i$ إلى وجود ما يُسمى **بالدورة الرباعية**، أي أن:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} i^{4n} = 1 & , & i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 & , & i^{4n+3} = -i \end{array}}$$

حيث $n$ عدد صحيح موجب.

**تعريف – ٢:**

| | | |
|---|---|---|
| $a = \text{Re}(z)$: | Real part of $z$ | الجزء الحقيقي من |
| $b = \text{Im}(z)$: | Imaginary part of $z$ | الجزء التخيلي من |
| $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$: | Argument of $z$ | سعة |
| $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ : | Absolute value of $z$ | القيمة المطلقة (طول) لـ |

**بعض العمليات الأساسية في جبر الأعداد المركبة:**

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

(أ) **عملية الجمع Addition:**

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$$

(ب) **عملية الطرح Subtraction:**

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)}$$

(ج) **عملية الضرب Multiplication:**

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + \underbrace{i^2 a_2 b_2}_{=-a_2b_2}$$

أي أن

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)}$$

## (د) عملية الترافق Conjunction:

إذا كان $z = a + ib$ فإن العدد المركب

$$\bar{z} = a - ib$$

يُسمى مرافق Conjugate العدد $z$ . ويُحقق الترافق غياب العدد التخيلي $i$ عند إجراء عملية الضرب $z\,\bar{z}$ أو $\bar{z}\,z$ حيث أن:

$$z\,\bar{z} = \bar{z}\,z = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R}$$

وبالتالي فحاصل ضرب العدد في مرافقه دائماً يعطي عدداً صحيحاً.

## (هـ) عملية القسمة Division:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

ولإجراء عملية القسمة فإنه يمكن استعمال تعريف المرفق وذلك للتخلص من كون المقام عدد مركب لا يمكن بسهولة القسمة عليه، وبالتالي فإنه عند الضرب في $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \times \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

أي أننا نجحنا في النهاية في كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ كعدد مركب مكون من جزء حقيقي وجزء تخيلـــي وهذا ييسر العمليات الجبرية كثيراً.

**(و) القيمة المطلقة للعدد المركب Absolute Value:**

إذا كان $z = a + ib$ فإن القيمة المطلقة $|z|$ للعدد المركب $z$ تُعطي بـــ :

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

يُطلق على القيمة المطلقة أيضاً طول $z$ (Length of $z$). وتحقق القيمة المطلقـــة العلاقـــات الهامة التالية:

$$\begin{aligned}
&(a)\quad |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \\
&(b)\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\quad,\quad z_2 \neq 0 \\
&(c)\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\
&(d)\quad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|
\end{aligned}$$

ويمكن للقارئ محاولة إثبات هذه العلاقات والتي يمكن تعميمها كالآتي:

$$\begin{aligned}
&(e)\quad \left|\prod_{i=1}^{n} z_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |z_i| \\
&(f)\quad \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|
\end{aligned}$$

ويمكن إثبات العلاقة $(e)$ باستعمال الاستنتاج الرياضي كالتالي:

* أولاً: عند $n = 2$:

$$\left|\prod_{i=1}^{2} z_i\right| = |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$

وذلك من العلاقة $(a)$.

* ثانياً: بفرض صحة العلاقة عند $n = m$، فإن:

$$\left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| = \prod_{i=1}^{m} |z_i|$$

وبالتالي فإنه عند $n = m + 1$ يكون:

$$\left|\prod_{i=1}^{m+1} z_i\right| = \left|\prod_{i=1}^{m} z_i \cdot z_{m+1}\right| = \left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| \cdot |z_{m+1}| = \prod_{i=1}^{m} |z_i| \cdot |z_{m+1}| = \prod_{i=1}^{m+1} |z_i|$$

أي أن العلاقة صحيحة عند $m + 1$ بفرض صحتها عند $m$. وحيث أن العلاقة $(e)$ صحيحة عند $m = 2$، إذن فهي صحيحة عند $m = 2, 3, 4, \ldots$.

وبالمثل يمكن إثبات العلاقة $(f)$ باستعمال الاستنتاج الرياضي أيضاً كالتالي:

* أولاً: عند $n = 2$:

$$\left|\sum_{i=1}^{2} z_i\right| \le |z_1| + |z_2|$$

وذلك من العلاقة $(c)$.

* ثانياً: بفرض صحة العلاقة عند $n = m$ ، فإن:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} z_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |z_i|$$

وبالتالي فإنه عند $n = m + 1$ يكون:

$$\left|\sum_{i=1}^{m+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} + z_{m+1}\right| \le \left|\sum_{i=1}^{m} z_i\right| + |z_{m+1}| \le \sum_{i=1}^{m} |z_i| + |z_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |z_i|$$

أي أن العلاقة صحيحة عند $m + 1$ بفرض صحتها عند $m$. وحيث أن العلاقة $(f)$ صحيحة عند $m = 2$، إذن فهي صحيحة عند $m = 2, 3, 4, \ldots$.

**قوانين هامة:**

بعد أن عرفنا عمليتي الجمع والضرب فإن هاتين العمليتين تحققان القوانين الآتية:

إذا كان $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$ فإن:

(*i*) قانون الإقفال ***Closure Law***

$$z_1 + z_2 \in \mathbf{Z} \quad , \quad z_1 z_2 \in \mathbf{Z}$$

(*ii*) قانون الإبدال الجمعي ***Commutative Law of Addition***

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(*iii*) قانون الإدماج الجمعي ***Associative Law of Addition***

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

(*iv*) قانون الإبدال الضربي ***Commutative Law of Multiplication***

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(*v*) قانون الإدماج الضربي ***Associative Law of Multiplication***

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)\, z_3$$

(*vi*) قانون التوزيع ***Distribution Law***

$$z_1(z_2 + z3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

(*vii*) المحايد الجمعي ***0: Identity with respect to Addition***

$$z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 \quad , \quad 0 \in \mathbf{Z}$$

(*viii*) المحايد الضربي ***1: Identity with respect to Multiplication***

$$(1)z_1 = z_1(1) = z_1 \quad , \quad 1 \in \mathbf{Z}$$

(*ix*) المعكوس الجمعي ***Additive Inverse***

لكل عدد $z \in \mathbf{Z}$ يوجد عدد $(-z) \in \mathbf{Z}$ (يسمى المعكوس الجمعي للعدد $z$)

بحيث: $\boxed{z+(-z) = 0}$

(*x*) المعكوس الضربي ***Multiplicative Inverse***

لكل عدد $z \in \mathbf{Z}$ يوجد عدد $(z^{-1}) \in \mathbf{Z}$ (يسمى المعكوس الضربي للعدد $z$)

بحيث: $\boxed{zz^{-1} = 1}$

**مثال ١:**

إذا كان:

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = -1 - 2i \quad , \quad z_3 = i$$

أوجد حاصل العمليات الآتية:

$(a)\quad z = 2z_1 + 3z_2 \qquad , \qquad (b)\quad z = z_1 + \dfrac{z_2}{z_3}$

$(c)\quad z = z_1 - z_2 + z_3 \qquad , \qquad (d)\quad z = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 + z_3}$

$(e)\quad z = z_1(z_2 + z_3) \qquad , \qquad (f)\quad r = |z_1 - z_2 + z_3|$

$(g)\quad r = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

**الحل:**

$$(a) z = 2z_1 + 3z_2 = 2(1+i) + 3(-1-2i) = (2+2i) + (-3-6i) = -1-4i$$

$$(b) z = z_1 + \frac{z_2}{z_3} = (1+i) + \frac{(-1-2i)}{i} = (1+i) + \frac{(-1-2i)}{i} \times \left(\frac{i}{i}\right) = (1+i) + \frac{-i-2i^2}{i^2}$$

(تذكر أن $i^2 = -1$)

$$z=(1+i)+\frac{-i+2}{-1}=(1+i)+(-2+i)=-1+2i$$

$$(c)\,z=z_1-z_2+z_3=(1+i)-(-1-2i)+(i)=1+i+1+2i+i=2+4i$$

$$(d)\,z=\frac{z_1+z_2}{z_1+z_3}=\frac{(1+i)+(-1-2i)}{(1+i)+(i)}=\frac{-i}{1+2i}=\frac{-i}{1+2i}\times\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right)=\frac{-i-2}{1+4}$$ (لماذا؟)

$$z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

$$(e)\,z=z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3=(1+i)(-1-2i)+(1+i)(i)=(1-3i)+(-1+i)=-2i$$

أو

$$z=z_1(z_2+z_3)=(1+i)[(-1-2i)+(i)]=(1+i)(-1-i)=-2i$$

$$(f)\,r=|z_1-z_2+z_3|=|(1+i)-(-1-2i)+(i)|=|2+4i|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

لاحظ أنه من الخطأ أن نوزع عملية القيمة المطلقة على الأعداد .. أي أنه لا يمكن أن نقوم بحل هذا الجزء (الجزء $f$) بالصورة التالية:

$$r=|z_1-z_2+z_3|=|z_1|-|z_2|+|z_3|$$

فهذا خطأ حيث أن:

$$|z_1-z_2+z_3|\neq|z_1|-|z_2|+|z_3|$$

إذن لابد من القيام بأداء العمليات داخل علامتي القيمة المطلقة قبل أن نجري عملية القيمة المطلقة

$$(g)\,r=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{(1+i)}{(-1-2i)}\right|=\left|\frac{(1+i)}{(-1-2i)}\times\left(\frac{-1+2i}{-1+2i}\right)\right|=\left|\frac{-3+i}{1+4}\right|=\frac{1}{5}|-3+i|=\frac{1}{5}\sqrt{9+1}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

أو

$$r=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|1+i|}{|-1-2i|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

## تمرينات (١)

إذا كان

$$z_1=1+i\quad,\quad z_2=1-i\quad,\quad z_3=1+i\quad,\quad z_4=i\quad,\quad z_5=6$$

احسب ناتج العمليات الآتية:

$$(i)\,z=z_1+z_2+z_3+z_4+z_5\left(=\sum_{i=1}^{5}z_i\right)\qquad(ii)\,z=z_1-z_2+z_3-z_4+z_5$$

$$(iii)\,z=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}+\frac{z_5}{z_4}\qquad(iv)\,z=z_1(z_2+z_3)+z_4(z_5+z_3)$$

$(v)\, r = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \left( = \sum_{i=1}^{4} |z_i| \right)$ $\qquad$ $(vi)\, r = \dfrac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|}$

$(vii)\, r = |(z_1 + z_2) + z_3|$ $\qquad$ $(viii)\, z = z_1 z_2 \left( \dfrac{z_3}{z_4} + z_5 \right)$

$(ix)\, z = z_1 |z_2 + z_3|$ $\qquad$ $(x)\, \theta = Arg\left( \dfrac{z_1}{z_2} \right)$

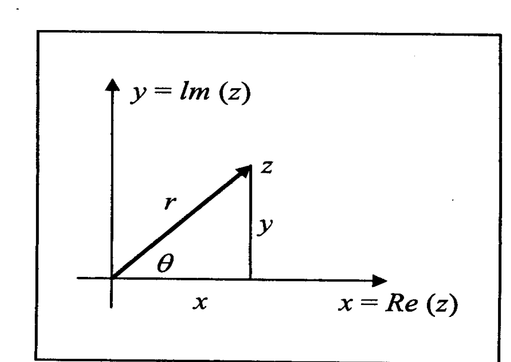
**ملاحظة:**

تعريف السعة لعدد مركب $z = a + ib$ هي (كما سبق): $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

**التعبير الشكلي للأعداد المركبة**

## GRAPHICAL REPRESENTATION OF COMPLEX NUMBERS

لرسم هذه الأعداد في أشكال فإنه لابد أن نعرف مستوياً (خالياً) للرسم عليه. ويتم ذلك برسم إحداثيات متعامدة (كما في حالة الأعداد الحقيقية) على أن يكون الخط الأفقي للأعداد الحقيقية والخط الرأسي للأعداد التخيلية. ولذلك يسمى بالمستوى التخيلي (أي ليس له وجود واقعي) كما هو موضح بالرسم




المقابل. وبالتالي يأخذ العدد $z = x + iy$ صورة المتجه الموضح بالرسم والذي له $x$ من الأعداد الحقيقية، $y$ من الأعداد التخيلية. لاحظ أن طول المتجه $z$ هو:

$$r = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

كذلك لاحظ صحة العلاقات الآتية:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

هذا التعبير الشكلي للعدد المركب قد ساعد على كتابة العدد المركب بدلالة عددين حقيقيين آخرين غير $x, y$ كما بالشكل؛ وهما $r, \theta$. فإذا عرفنا طول العدد $z$ (أي $r$) وعرفنا سعته (أي $\theta$) فإنه يمكن تعيين العدد المركب تعييناً محكماً.

فإذا ما عبرنا عن العدد المركب $z$ بالعددين الحقيقيين $(x, y)$ فإن هذا يسمى بالتمثيل الكرتيزي **Cartesian Representation** للعدد $z$. أما إذا عبرنا عنه بالعددين الحقيقيين $(r, \theta)$ فإن هذا التمثيل يسمى بالتمثيل القطبي **Polar Representation** للعدد z. وإذا ما استخدمنا التمثيل الكرتيزى فإننا نعبر عن العدد z بالصورة $z=x+iy$، أما إذا استخدمنا التمثيل القطبي فإننا نعبر عن العدد $z$ بصيغة أويلر **Euler** والمعروفة كالآتي:

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\sin\,\theta$$

وهذه الصيغة تمكننا من كتابة التمثيل القطبي كما يلي:

**التمثيل القطبي للعدد المركب $z = x + iy$:**

$$z = r\,e^{i\theta}$$

حيث

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

**مثال ٢:**

عبر عن الأعداد المركبة الآتية بتمثيل آخر:

$$(a)z = 1 + i \qquad (b)z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

**الحل:**

$(a)\ z = 1 + i$

التمثيل هنا كرتيزى والمطلوب التعبير عنه بتمثيل قطبي.

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left| \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

مع ملاحظة أن $\theta$ يجب أن يعبر عنها بالتقدير الدائري وليس بالدرجات.

$(b)\ z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

التمثيل هنا قطبي والمطلوب التعبير عنه بتمثيل كرتيزي.

$$\left.\begin{matrix} r = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \equiv 60^\circ \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left| \begin{matrix} x = r\cos\theta = \frac{3}{2} \\ y = r\sin\theta = \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow z = x + iy = \frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

**ملاحظة:**

ليس هناك فرق عند كتابة $\cos\theta$ (من حيث القيمة) عند استعمال $\theta$ بالدرجات أو بالدائري، وكذلك بالنسبة لجميع النسب المثلثية الأخرى.

## نظرية ديموافر DEMOIVRE's THEOREM

إذا كان:

$$z_j = r_j e^{i\theta_j} \in \mathbf{Z} \quad , \quad j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

فإن

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right) + i\sin\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)\right]$$

$$= (r_1 r_2 \ldots r_n) . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$$

**الإثبات:**

حيث أن: $e^a \,.\, e^b = e^{a+b}$

إذن:

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \prod_{j=1}^{n} r_j e^{i\theta_j} = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left[e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \ldots\ldots e^{i\theta_n}\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left[e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)}\right] = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left[e^{i\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)}\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right) \cdot \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right) + i\sin\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)\right]$$

هذه النظرية مفيدة جداً في الحسابات كم يتضح من المثال التالي.

**مثال ٣:**

إذا كان: $z_1 = 1+i \quad , \quad z_2 = 1-i \quad , \quad z_3 = i \quad , \quad z_4 = 2+i$

أوجد: $z = z_1 z_2 z_3 z_4 = \prod_{j=1}^{4} z_j$

**الحل:**

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 = (1+i)(1-i)(i)(2+i)$$

وبدلا من استخدام التمثيل الكرتيزي لكل عدد من الأعداد المركبة المعطاه، من الأنسب استخدام التمثيل القطبي للأعداد ثم استعمال نظرية ديموافر السابقة.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_3 = r_3 e^{i\theta_3} = 1\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_4 = r_4 e^{i\theta_4} = \sqrt{5}\,e^{i(\theta)}$$

حيث

$$\theta_4 = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.464 \text{ rad.}$$

وباستعمال نظرية ديموافر نحصل على:

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 = \left[\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right]\cdot\left[\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]\cdot\left[1\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]\cdot\left[\sqrt{5}e^{i\theta}\right]$$

$$= \left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\sqrt{5}\right]\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = 2\sqrt{5}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$= 2\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] = 2\sqrt{5}[-\sin\theta + i\cos\theta]$$

$$= 2\sqrt{5}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = -2+4i$$

**صيغة أخرى لنظرية ديموافر:**

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$$

حيث $n$ أي عدد نسبي $(n \in \boldsymbol{R})$.

**الإثبات:**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وبالمثل (حيث أن $\cos(-\theta) = \cos$ , $\sin(-\theta) = -\sin\theta$):

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = (e^{i(-\theta)})^n = e^{i(-n\theta)}$$

$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

**مثال ٤:**

ضع المقدار التالي في أبسط صورة ممكنة:

$$z = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^6(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^7(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^3}$$

**الحل:**

بتطبيق نظرية ديموافر:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^6(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^7(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^3} \\
&= \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta))}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)} \\
&= \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)(\cos 10\theta - i\sin 10\theta)}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)} \\
&= \frac{\cos(-16\theta) + i\sin(-16\theta)}{\cos 9\theta + i\sin 9\theta} \qquad (\text{لماذا؟}) \\
&= \cos(-25\theta) + i\sin(-25\theta) \qquad (\text{لماذا؟}) \\
&= \cos 25\theta - i\sin 25\theta
\end{aligned}$$

لاحظ أننا في حلنا السابق استعملنا العلاقات التالية:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

**ملاحظة هامة:**

هناك تطبيقات هامة لنظرية ديموافر حيث يمكننا إيجاد $\sin n\theta, \cos n\theta$ بدلالة قوى $\sin\theta,$ $\cos\theta$ **فمثلاً** خذ المفكوك $(\cos\theta + \sin\theta)^4$، فإنه باستعمال مفكوك ذات الحدين:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta\,(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i^2\sin^2\theta) + 4\cos\theta(i^3\sin^3\theta) + i^4\sin^4\theta$$

وباستعمال الدورة الرباعية لـ $I$ فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta) \qquad (1)$$

كذلك فإنه باستعمال نظرية ديموافر:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos4\theta + i\sin4\theta \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) ,(1) ومساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلـــي في كلٍ منهما فإننا نحصل على هذين المفكوكين:

$$\cos4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$
$$\sin4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

وهكذا يمكننا، وبنفس الأسلوب دائماً، إيجاد مفكـــوك $\cos n\theta$ أو $\sin n\theta$ بدلالـــة قـــوى $\sin\theta, \cos\theta$.

ويجب أن نذكر هنا أنه يمكننا القيام بالعكس، أي أنه يمكننا فك $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ بدلالة $\cos m\theta$ و $\sin m\theta$ حيث $1 \le m \le n$ . فمثلاً إذا وضعنا

$$x = \cos\theta + i\sin\theta$$

فإن

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

(لماذا؟) وبالتالي تكون:

$$x^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$\frac{1}{x^n} = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

أي أنه يمكننا الحصول على الآتي:

$$2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \quad , \quad 2\cos n\theta = x^n + \frac{1}{x^n}$$
$$2i\sin\theta = x - \frac{1}{x} \quad , \quad 2i\sin n\theta = x^n - \frac{1}{x^n}$$

وبالتالي إذا طلب مفكوك $\cos^5\theta$ فإن:

$$(2\cos\theta)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين:

$$(2\cos\theta)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$$

وبإعادة التجميع:

$$(2\cos\theta)^5 = \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)10\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= (2\cos 5\theta) + 5(2\cos 3\theta) + 10(2\cos\theta)$$
$$= 2\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 20\cos\theta$$

وبالقسمة على $2^5$ فإننا نحصل على:

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos\theta$$

وهذا المفكوك يفيد جدا في تكامل أمثال هذه الدوال على الأقل.

**تمرينات ٢**

(١) أثبت أن $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

(٢) أوجد $\sin^3\theta$ , $\cos^3\theta$ بدلالة $\cos m\theta$ , $\sin m\theta$ حيث $1\le m\le 2$ وبالتالي أوجد $\int \sin^3\theta d\theta$ بشكل عام.

(٣) أوجد $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$ بدلالة قوى $\cos\theta$, $\sin\theta$.

(٤) كرر السؤال (٢) بالنسبة لـ $\sin^6\theta$.

(٥) كرر السؤال (٣) بالنسبة لـ $\sin 6\theta$.

**إيجاد الجذور النونية للأعداد المركبة**

## THE n[th] ROOT OF THE COMPLEX NUMBERS

دع

$$z=\text{r}\,e^{i\theta}=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

فإن

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(e^{i(\theta+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}}\quad,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$$

وعندما تكون $k=0$ فإن القيمة تسمى بالقيمة الأساسية Principal Value، ثم نضع $k=1$ ثم $k=2$ .. إلخ وذلك للحصول على الجذور المختلفة.

**ملاحظات:**

**ملحوظة (١):**

لا يمكننا الحصول على الجذور باستخدام التعبير الكرتيزي .. لذا لابد من التحويل إلى الصورة القطبية.

**ملحوظة (٢):**

إضافة $2\pi k$ إلى $\theta$ في سعة العدد المركب تعطي جميع الاحتمالات الممكنة لإعطاء جذور، حيث أن إضافة هذا العدد الزوجي من $\pi$ يجعل العدد المركب يعود إلى قيمته ولكن القسمة على $n$ تعدد القيم فنحصل على الجذور. فمثلاً يمكننا إيجاد $\sqrt{1+i}$ كالتالي:

حيث أن: $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

إذن:

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi/4+2\pi k}{2}\right)},\quad k=0,1$$
$$=2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)}\quad,\quad k=0,1$$

وبالتالي يكون الجذران كالتالي:

$$z_1=2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\quad,\quad (k=0)$$
$$2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]\quad,\quad (k=1)$$

**ملحوظة (٣):**

يمكننا الحصول على جذور الواحد الصحيح كالآتي:

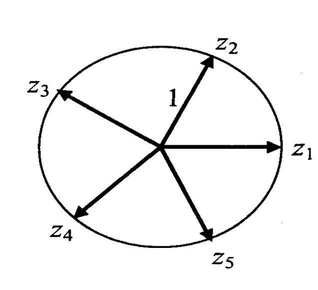
حيث أن: $1=1\,e^{i(0)}$

إذن $$(1)^{\frac{1}{n}}=1^{\frac{1}{n}}\left(e^{i(0+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}\quad,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

فمثلاً $$(1)^{\frac{1}{5}}=e^{i\left(\frac{2\pi k}{5}\right)}\quad,\quad k=0,1,2,3,4$$

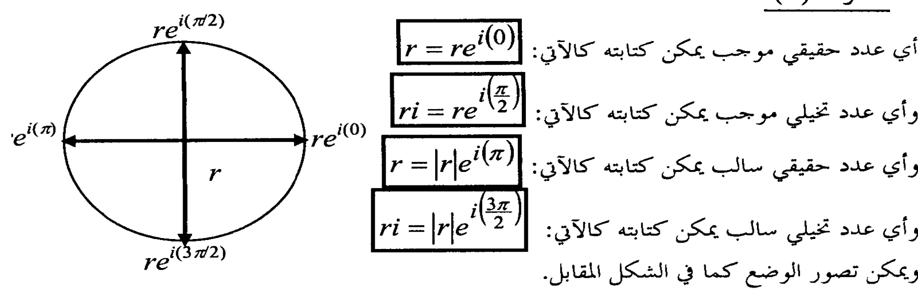
فيكون

$$z_1=1\quad,\quad z_2=e^{i\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$
$$z_3=e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\quad,\quad z_4=e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$$
$$z_5=e^{i\left(\frac{8\pi}{5}\right)}$$




وكأننا قسمنا دائرة نصف قطرها الوحدة إلى خمسة أقسام متساوية كما هو مبين بالشكل.

**ملحوظة (٤):**




أي عدد حقيقي موجب يمكن كتابته كالآتي: $\boxed{r = re^{i(0)}}$

وأي عدد تخيلي موجب يمكن كتابته كالآتي: $\boxed{ri = re^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$

وأي عدد حقيقي سالب يمكن كتابته كالآتي: $\boxed{r = |r|e^{i(\pi)}}$

وأي عدد تخيلي سالب يمكن كتابته كالآتي: $\boxed{ri = |r|e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}$

ويمكن تصور الوضع كما في الشكل المقابل.

## تمرينات ٣

(١) أوجد الجذور الآتية:

$$(a)\ \sqrt[4]{1-i} \qquad (b)\ \sqrt{1+2i} \qquad (c)\ \sqrt[4]{i} \qquad (d)\ \sqrt[3]{5}$$

(٢) أثبت أن

$$x^n - (a+ib) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( x - r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right] \right)$$

حيث: $r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(٣) أوجد حل المعادلة: $x^4 + a^4 = 0$

(٤) أوجد: $S = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3^k} \cos kx \right)$

**مساعدة:** يمكنك تعريف متسلسلة لانهائية أخرى هي: $C = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^k} \sin kx \right)$ ثم إيجاد الكمية $S+iC$.

**الإجابة:** $S = \dfrac{9 - 3\cos x}{10 - 6\cos x}$

**تمرينات عامـــة**

(١) أثبت أن: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

(٢) أثبت أن: $\dfrac{a+ib}{a-ib}-\dfrac{a-ib}{a+ib}=\dfrac{4abi}{a^2+b^2}$

(٣) إذا كان $(x+iy)^4=a+ib$

اثبت أن: $a^2+b^2=(x^2+y^2)^4$

(٤) أوجد $\operatorname{Re}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ حيث $n$ عدد صحيح موجب.

(٥) أوجد $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\cos k\theta$ <u>الإجابة:</u> $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$

(٦) أثبت أن $\left|\dfrac{4+\cos\phi-i\sin\theta}{4+\cos\phi+i\sin\theta}\right|=1$

(٧) أوجد جذور المعادلة: $1+x^3+x^4+x^7=0$

(٨) أثبت أن: $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{11}{2}}}{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}}=-1$

---

**تم بحمد الله**

# المراجع


1. E.G. Phillips, Functions of a complex variable, Oliver and Boyd, London, 1958.

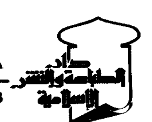
2. M.J. Ablowitz and A.S. Fokas, Complex variables Introduction and applications, 2nd ed., Cambridge Univ. press, 2003.

3. R.V. Churchill and J.W. Brown, Complex Variables and applications, 5th ed., McGraw-Hill, N.Y., 1990.

4. M.R. Spiegel, Complex Variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, N.Y., 1974.

# فهرست

# Index




مطابع دار الطباعة والنشر الإسلامية/العاشر من رمضان/المنطقة الصناعية ب٢ تليفاكس : ٣٦٢٣١٣ - ٣٦٣٣١٤

Printed in Egypt by ISLAMIC PRINTING & PUBLISHING Co. Tel:. 015 / 363314 - 362313

مكتب القاهرة : مدينة نصر ١٢ ش ابن هانيء الأندلسي ت : ٤٠٣٨١٣٧ - تليفاكس : ٤٠١٧٠٥٣